Université Paris Sud-Orsay
DEA d'Équations aux Dérivées Partielles

Année 2000/2001

Propriétés spectrales d'opérateurs elliptiques sur des variétés compactes.

Jonathan Le Roux

Mémoire de DEA sous la direction de Patrick Gérard

Juillet 2001

Table des matières

Introduction

Nous nous intéressons dans ce mémoire aux résultats présentés par C. D. Sogge dans [So1]. Il s'agit d'observer le comportement des normes d'opérateurs de projection spectrale liés à un opérateur elliptique du second ordre P sur une variété riemannienne compacte. Ce problème avait déjà été étudié par Sogge dans le cas de la sphère, et des résultats optimaux avaient été obtenus. Les résultats présentés ici en sont une extension.

La preuve repose sur des inégalités de type Sobolev pour $P + k^2$ avec k grand, et les outils principaux pour les démontrer sont la paramétrix d'Hadamard et des théorèmes d'intégrales oscillantes. Nous commencerons par exposer les résultats auxquels nous voulons aboutir et le schéma de la preuve, nous introduirons ensuite des notions classiques de géométrie riemannienne (intégration sur une variété riemannienne, application exponentielle, géodésiques, coordonnées normales, etc...) , puis nous développerons l'outil de la paramétrix d'Hadamard, que nous utiliserons enfin à l'aide d'un lemme d'intégrales oscillantes.

Chapitre 1

Résultats et schéma de la preuve

1.1 Données du problème

Soit M une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord, de dimension ≥ 2, et P un opérateur elliptique du second ordre sur M à coefficients C^∞, que l'on suppose autoadjoint, et on note $\lambda_j, j = 0, 1, \ldots$ les valeurs propres de P ordonnées de sorte que la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ soit monotone. Nous verrons au **2.2** qu'alors l'espace $L^2(M)$ se décompose en la somme directe des espaces propres $\mathcal{H}_j$ de P. On note $\chi_k, k = 1, 2, \ldots$ les projections orthogonales associées aux sous-espaces de L^2 $\sum_{j\in\Lambda_k} \mathcal{H}_j$, avec $\Lambda_k = \{j/\sqrt{|\lambda_j|} \in [k-1, k[\}$. On a donc, si $f = \sum \phi_j$, où $\phi_j \in \mathcal{H}_j$,

$$\chi_k f = \sum_{j\in\Lambda_k} \phi_j.$$

Dans la suite, on notera C une constante n'étant pas nécessairement la même à chaque occurrence. On notera $p_n = 2(n+1)/(n+3)$ l'exposant critique, et $q = p'_n = 2(n+1)/(n-1)$.

1.2 Résultats principaux

Théorème 1.2.1. *Avec les notations introduites ci-dessus,*
(i) Si $f \in L^p(M), 1 \leq p \leq p_n$,

$$||\chi_k f||_{L^{p'}(M)} \leq C k^{n(1/p-1/p')-1} ||f||_{L^p(M)}, \tag{1.1}$$

(ii) Si $f \in L^p(M), p_n \leq p \leq 2$,

$$||\chi_k f||_{L^{p'}(M)} \leq C k^{(n-1)(1/p-1/2)} ||f||_{L^p(M)}, \tag{1.2}$$

où la constante C *ne dépend ici que de* M *et* P*. De plus, les inégalités (1.1) sont optimales.*

Par la suite, on notera $\sigma(p,n) = \begin{cases} n(1/p-1/p') - 1 \text{ si } 1 \leq p \leq p_n \\ (n-1)(1/p-1/2) \text{ si } p_n \leq p \leq 2 \end{cases}$.

Théorème 1.2.2. *Avec les notations introduites ci-dessus,*
(i) Si $f \in L^p(M), 1 \leq p \leq p_n$,

$$||\chi_k f||_{L^2(M)} \leq C k^{\sigma(p,n)/2} ||f||_{L^p(M)}, \tag{1.3}$$

(ii) Si $f \in L^p(M), p_n \leq p \leq 2$,

$$||\chi_k f||_{L^2(M)} \leq Ck^{\sigma(p,n)/2}||f||_{L^p(M)}. \tag{1.4}$$

Là aussi la constante C *ne dépend que de* M *et* P, *et les inégalités (1.3) sont optimales.*

1.3 Équivalence des deux théorèmes

Remarquons tout d'abord que, pour $f \in L^2(M)$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\chi_k f \in C^\infty$ par régularité elliptique. En particulier, pour $f \in C^\infty$, $\chi_k f$ est dans tous les L^p. Soit $p \in [1,2], k \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = \sigma(p,n)$.

Supposons le théorème 1.2.2 vrai. On définit χ_k sur C^∞, puis on étend par continuité à tout L^p. $\chi_k : L^p \to L^2$, donc par dualité $\chi_k^* : L^2 \to L^{p'}$, avec la même inégalité sur les normes. Les χ_k étant des projecteurs orthogonaux, on a

$$\forall f, g \in C^\infty,\ < \chi_k(f), g >_{L^2} = < f, \chi_k(g) >_{L^p, L^{p'}},$$

et on conclut par continuité que la norme de $\chi_k : L^2 \to L^{p'}$ vérifie la même majoration que celle de $\chi_k : L^p \to L^2$.

D'où :

$$||\chi_k f||_{p'} \leq Ck^{\sigma(p,n)/2}||f||_2 \leq (Ck^{\sigma(p,n)/2})^2||f||_p,$$

ce qui montre que le théorème 1.2.2 implique le théorème 1.2.1.

Réciproquement, supposons le théorème 1.2.1 vrai. χ_k étant un projecteur orthogonal, on a

$$||\chi_k f||_2^2 = < \chi_k f, \chi_k f >_{L^2} = < f, \chi_k(f) >_{L^p, L^{p'}},$$

d'où

$$||\chi_k f||_2^2 \leq ||\chi_k f||_{p'}||f||_p,$$

ce qui implique le théorème 1.2.2.

1.4 Schéma de la preuve

Commençons par montrer que le théorème 1.2.2 est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 1.4.1. *Si* $f \in L^2(M)$,

$$||\chi_k f||_{L^{2(n+1)/(n-1)}(M)} \leq Ck^{(n-1)/2(n+1)}||f||_{L^2(M)}, \tag{1.5}$$

$$||\chi_k f||_{L^\infty(M)} \leq Ck^{(n-1)/2}||f||_{L^2(M)}. \tag{1.6}$$

On remarque tout d'abord que $2(n+1)/(n-1) = p_n'$ et $(n-1)/2(n+1) = \sigma(p_n, n)/2$, donc (1.5) s'écrit $||\chi_k f||_{L^{p_n'}(M)} \leq Ck^{\sigma(p_n,n)/2}||f||_{L^2(M)}$, et par dualité

$$||\chi_k f||_{L^2} \leq Ck^{\sigma(p_n,n)/2}||f||_{L^{p_n}}.$$

De plus, les χ_k étant associés à une base hilbertienne de $L^2(M)$, on a $||\chi_k f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}$. Pour $p \in [1,2]$, notons N_p la norme de $\chi_k : L^p \to L^2$.

Soit $p \in [p_n, 2]$. On utilise le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin :

Théorème 1.4.2. *Soit T un opérateur linéaire que l'on suppose continu $L^{p_i} \to L^{q_i}$ de norme k_i, $i = 0, 1$. Alors pour tout $\theta \in [0,1]$, si l'on pose $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, T est continu $L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}$ et sa norme k_θ vérifie $k_\theta \leq k_0^{1-\theta} k_1^\theta$.*

Soit θ tel que $\frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p_n} = \frac{1}{p}$, alors

$$N_p \leq N_2^{1-\theta} N_{p_n}^\theta \leq C k^{\theta \frac{n-1}{2(n+1)}}.$$

Or $\theta = \frac{1/p - 1/2}{1/p_n - 1/2}$, et on vérifie qu'on a bien $\theta \frac{n-1}{2(n+1)} = \sigma(p,n)/2$, ce qui implique les inégalités (1.4).

On vérifierait de même que le théorème 1.4.2 appliqué entre $L^1 \to L^2$ et $L^{p_n} \to L^2$ donne les inégalités (1.3).

Montrons enfin que les inégalités (1.5) et (1.6) sont conséquences des inégalités différentielles suivantes :

Lemme 1.4.3. *On pose $\sigma = \sigma(p_n, n)/2$, $\sigma' = \sigma(\infty, n)/2$. $\exists C$, $\forall u \in C^\infty(M)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,*

$$||u||_{L^{p_n'}} \leq C k^{\sigma - 1} ||(P \pm (k+i)^2)u||_{L^2} + C k^\sigma ||u||_{L^2}. \tag{1.7}$$

$$||\chi_k u||_{L^\infty} \leq C k^{\sigma' - 1} ||(P \pm (k+i)^2)u||_{L^2} + C k^{\sigma'} ||u||_{L^2}. \tag{1.8}$$

On peut tout d'abord supposer que le symbole principal de P est défini positif, quitte à remplacer P par $-P$, car $\dim M \geq 2$ donc T^*M privé de la section nulle est connexe et le symbole principal de P ne s'annule pas sur cet ensemble. P est alors semi-borné inférieurement, ce que l'on voit en appliquant le lemme suivant avec $C = 0$, $N = 0$ et $m = 1$:

Lemme 1.4.4. *Soit S un opérateur pseudo-différentiel classique sur une variété compacte M. On suppose S elliptique d'ordre $2m$, de symbole principal s réel positif. Alors,*

$$\exists C \geq 0, \forall N, \exists C_N, \forall u \in C^\infty(M), Re(< Su, u >) \geq C||u||_{H^m}^2 - C_N ||u||_{H^{-N}}^2.$$

Démonstration : Montrons que, pour tout n, il existe Q_n d'ordre m et R_n d'ordre $m-n-1$ tels que $S = Q_n^* Q_n + R_n$. Soit $\psi \in C_0^\infty$ réelle valant 1 sur un voisinage de 0. Pour $n = 0$, on prend Q_0 de symbole $(1-\psi)\sqrt{s}$. On suppose avoir trouvé Q d'ordre m tel que $S - Q^*Q = R$ est d'ordre $t \leq 2m - 1$: si A est un opérateur d'ordre $k < m$, $S - (Q+A)^*(Q+A) = S - Q^*Q - Q^*A - AQ^* - A^*A = R - (Q^*A + A^*Q + A^*A)$. On remarque que le symbole principal de Q vérifie $|\sigma(Q)|^2 = s$ donc ne s'annule pas en dehors de 0. On prend A de symbole $(1-\psi)\sigma(R)/(2\sigma(Q))$. $S - (Q+A)^*(Q+A)$ est alors un opérateur d'ordre inférieur à $t-1$, et on conclut par récurrence.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\forall n, \forall u \in C^\infty(M), < Su, u >= ||Q_n u||_{L^2}^2 + < R_n u, u > . \tag{1.9}$$

On choisit n tel que R_n soit d'ordre $-2N$. R_n est continu de H^{-N} dans H^N, donc

$$| < R_n u, u >_{H^N}^{H^{-N}} | \leq C_N ||u||_{H^{-N}}^2.$$

D'autre part, on montre par récurrence comme précédemment que pour un opérateur Q elliptique d'ordre s et pour tout $k > 0$, il existe un opérateur pseudo-différentiel E_k d'ordre $-s$ tel que $E_k Q = Id + T_{-k}$, avec T_{-k} pseudo-différentiel d'ordre $-k$. On en déduit que, si $u \in H^m$,

$$||u||_{H^m}^2 \leq C||E_{m+N}Q_n u||_{H^m}^2 + C||T_{-(m+N)}u||_{H^m}^2,$$

donc

$$||u||_{H^m}^2 \leq C||Q_n u||_{L^2}^2 + C_N||u||_{H^{-N}}^2.$$

D'où

$$||Q_n u||_{L^2}^2 \geq C||u||_{H^m}^2 - C_N||u||_{H^{-N}}^2,$$

et on conclut grâce à (1.9) que

$$Re(< Su, u >) \geq C||u||_{H^m}^2 - C_N||u||_{H^{-N}}^2.$$

□

Notons aussi que les inégalités obtenues ne nous intéressent que pour des k grands. En effet, soit $M \in \mathbb{N}$, soit $k \leq M$. χ_k est à valeurs dans un espace de dimension finie, donc sur lequel toutes les normes sont équivalentes. D'où $||\chi_k f||_\infty \leq C||\chi_k f||_2 \leq C||f||_2$. On conclut par interpolation que de telles inégalités sont vraies pour tout $q \in [2, \infty]$. On obtient alors les inégalités du théorème 1.2.2 pour k borné par dualité.

Soit $u = \sum_j \lambda_j \Phi_j \in C^\infty(M)$. On a alors $(P - (k+i)^2)\chi_k u = \sum_{j \in \Lambda_k} (\lambda_j - (k+i)^2)\Phi_j$, d'où

$$||(P - (k+i)^2)\chi_k u||_{L^2}^2 = \sum_{j \in \Lambda_k} |\lambda_j - (k+i)^2|^2 ||\Phi_j||_{L^2}^2.$$

Or, pour k suffisamment grand, $j \in \Lambda_k \Rightarrow \lambda_j \in [(k-1)^2, k^2)$, car P est semi-borné inférieurement ; donc $|\lambda_j - (k+i)^2|^2 = (k^2 + 1 - \lambda_j)^2 + (2k)^2 \leq (k^2 - (k-1)^2 + 1)^2 + 4k^2 \leq 8k^2$. Ainsi, pour k suffisamment grand,

$$||(P - (k+i)^2)\chi_k u||_{L^2(M)} \leq 4k||\chi_k u||_{L^2(M)},$$

ce qui nous permet avec le lemme 1.4.3 d'obtenir les inégalités (1.5).

1.5 Optimalité des résultats

Rappelons que, sur une variété compacte M, on a encore, par partition de l'unité, les injections de Sobolev : si $s < n/2$, on pose $1/p = 1/2 - s/n$. Alors l'injection $H^s \hookrightarrow L^p$ est continue. Soit S un opérateur pseudo-différentiel classique autoadjoint d'ordre 2 sur M, et soit $f \in S^k(\mathbb{R})$. On admet qu'alors $f(S)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $2k$, et $\sigma_{2k}(f(S)) = f(\sigma_2(S))$, et que, si l'on suppose S positif et $1 + S$ inversible, alors $(1+S)^{-r}$: $H^s(M) \to H^{s+2r}(M)$ est continu. $(1+S)^{s/2}$ est un isomorphisme (continu) de H^s sur L^2, donc les normes $|| \cdot ||_{H^s}$ et $||(1+S)^{s/2} \cdot ||_{L^2}$ sont équivalentes. Les injections de Sobolev sont ainsi équivalentes aux inégalités

$$||u||_{L^p} \leq C||(1+S)^{s/2}u||_{L^2}.$$

Or, la fonction $2^{-ms}(1+\lambda)^{s/2}\sum_{2^m\leq k<2^{m+1}} 1_{[k,k+1[}(\sqrt{\lambda})$ est bornée uniformément en m, donc le calcul fonctionnel nous dit que l'opérateur $2^{-ms}(1+S)^{s/2}\sum_{2^m\leq k<2^{m+1}}\chi_k$ est borné sur L^2 uniformément en m, où l'on définit les χ_k comme au **1.1**.

Dans la suite, on notera $\chi_{[a,b[}$ l'opérateur $f(S)$ où $f(\lambda) = 1_{[a,b[}(\sqrt{\lambda})$. On a en particulier $\chi_{[2^m,2^{m+1}[} = \sum_{2^m\leq k<2^{m+1}}\chi_k$.

Il existe donc C dépendant uniquement de S et de M tel que :

$$\forall m, \left|\left|\chi_{[2^m,2^{m+1}[}f\right|\right|_{L^p} \leq C2^{ms}||f||_{L^2} = C2^{mn(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}||f||_{L^2}. \tag{1.10}$$

Montrons que le facteur $2^{mn(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$ est optimal :

Proposition 1.5.1. *On suppose qu'il existe α et C tel que,*

$$\forall m, ||\chi_{[2^m,2^{m+1}[}||_{L^2\to L^p} \leq C2^{m\alpha}.$$

Alors

$$\alpha \geq n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}).$$

Démonstration :

On admet le lemme suivant, qui est une version spectrale de la théorie de Littlewood-Paley :

Lemme 1.5.2. *Soit $\tilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ tel que $1-\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{\chi}(2^{-m}\sqrt{\lambda})$ soit à support compact. Si $p\geq 2$, il existe C tel que :*

$$||u||_{L^p} \leq C\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left|\left|\tilde{\chi}\left(\frac{\sqrt{S}}{2^m}\right)u\right|\right|_{L^p}^2\right)^{1/2} + C||u||_{L^2}. \tag{1.11}$$

$\tilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, donc on peut supposer que $\mathrm{supp}(\tilde{\chi})\subset[2^{-a},2^a[$, avec $a\in\mathbb{N}^*$. On déduit de l'hypothèse de la proposition en faisant une somme finie d'inégalités que

$$\forall m, ||\chi_{[2^{m-a},2^{m+a}[}||_{L^2\to L^p} \leq C2^{m\alpha}.$$

Or $\chi_{[2^{m-a},2^{m+a}[}\tilde{\chi}(\sqrt{S}/2^m) = \tilde{\chi}(\sqrt{S}/2^m)$, d'où $||\tilde{\chi}(\sqrt{S}/2^m)u||_{L^p} \leq C2^{m\alpha}||\tilde{\chi}(\sqrt{S}/2^m)u||_{L^2}$. On en déduit que

$$||u||_{L^p} \leq C\left(\sum_{m=0}^{+\infty}2^{2m\alpha}\left|\left|\tilde{\chi}\left(\frac{\sqrt{S}}{2^m}\right)u\right|\right|_{L^2}^2\right)^{1/2} + C||u||_{L^2}.$$

La fonction $g = 2^{m\alpha}(1+\lambda)^{-\alpha/2}\tilde{\chi}(\sqrt{\lambda}/2^m)$ étant bornée uniformément en m, il existe C tel que :

$$\forall m, ||2^{m\alpha}\tilde{\chi}(\sqrt{S}/2^m)u||_{L^2} \leq C||(1+S)^{\alpha/2}\chi_{[2^{m-a},2^{m+a}[}u||_{L^2},$$

comme on le voit en appliquant l'opérateur $g(S)$ à la fonction $(1+S)^{\alpha/2}\chi_{[2^{m-a},2^{m+a}[}u$ et en remarquant que les $\chi_{[a,b[}$ et S commutent. On en déduit :

$$\begin{aligned}
||u||_{L^p} &\leq C\left(\textstyle\sum_{m=0}^{+\infty}||\chi_{[2^{m-a},2^{m+a}[}(1+S)^{\alpha/2}u||_{L^2}^2\right)^{1/2} + C||u||_{L^2}\\
&\leq C\sqrt{2a}||(1+S)^{\alpha/2}u||_{L^2} + C||u||_{L^2}\\
&\leq C||u||_{H^\alpha}.
\end{aligned}$$

On conclut grâce au lemme suivant :

Lemme 1.5.3. *Si pour tout $u \in C^\infty(M)$,*

$$||u||_{L^p(M)} \leq C||u||_{H^\alpha(M)},$$

alors

$$\alpha \geq n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right).$$

Démonstration : Soient $x_0 \in M$, et $\psi \in C_0^\infty$. On pose

$$u^\epsilon(x) = \psi\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right).$$

On va travailler localement, on peut ainsi tout calculer en coordonnées. On va donc supposer qu'on est dans $\mathbb{R}^n$. En passant en Fourier, on obtient :

$$||u^\epsilon||_{H^\alpha}^2 = \int |\hat{\psi}(\epsilon\xi)|^2 \epsilon^{2n}(1+|\xi|^2)^\alpha \, d\xi = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^{2\alpha}} \int |\hat{\psi}(\eta)|^2 \epsilon^{2\alpha}\left(1+\frac{|\eta|^2}{\epsilon^2}\right)^\alpha \, d\eta.$$

$\hat{\psi} \in \mathcal{S}$, donc, par convergence dominée quand $\epsilon \to 0$, on obtient :

$$||u^\epsilon||_{H^\alpha}^2 \sim \epsilon^{n-2\alpha} \int |\hat{\psi}(\eta)|^2 |\eta|^{2\alpha} \, d\eta.$$

Ainsi, $||u^\epsilon||_{H^\alpha} \sim C\epsilon^{\frac{n}{2}-\alpha}$. Or, $||u^\epsilon||_{L^p} \sim C\epsilon^{\frac{n}{p}}$, donc on doit avoir

$$\epsilon^{\frac{n}{p}} \leq C\epsilon^{\frac{n}{2}-\alpha}, \quad \epsilon \to 0.$$

Cela implique l'inégalité désirée,

$$\frac{n}{2} - \alpha \leq \frac{n}{p}.$$

□

On a ainsi démontré l'optimalité du coefficient intervenant dans (1.10). □

Montrons que ces résultats impliquent l'optimalité des inégalités (1.1) et (1.3) : on déduit de (1.10) par dualité que, pour tout $p \in [1,2]$, il existe C tel que

$$\forall m, \left|\left|\chi_{[2^m,2^{m+1}[}f\right|\right|_{L^2} \leq C2^{mn(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}||f||_{L^p},$$

et de la proposition 1.5.1 que ce résultat est optimal.

En utilisant (1.3), on a, pour $1 \leq p \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \left|\left|\chi_{[2^m,2^{m+1}[}f\right|\right|_2^2 &\leq \textstyle\sum_{2^m \leq k < q2^{m+1}} ||\chi_k f||_2^2 \leq C \sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} k^{\sigma(p,n)} ||f||_p^2 \\ &\leq C2^{2mn(1/p-1/2)}||f||_p^2. \end{aligned}$$

On voit ainsi qu'une amélioration dans l'exposant de (1.3) entrainerait une amélioration dans l'exposant de (1.10), ce qui est impossible. (1.3) est donc optimale, et (1.1) aussi par équivalence de ces deux résultats.

1.6 Résultat dual

On pose $q_n = \frac{2(n+1)}{n-1}$, et $\sigma'(q,n) = \begin{cases} n[1/q' - 1/q] - 1 \text{ si } q_n \leq q \leq \infty \\ (n-1)(1/2 - 1/q) \text{ si } 2 \leq q \leq q_n \end{cases}$.

En utilisant la dualité comme on l'a fait au **1.3**, on obtient les inégalités suivantes, analogues de celles du théorème 1.2.2 :

Théorème 1.6.1. *Avec les notations introduites au théorème 1.2.1,*
(i) Si $f \in L^2(M), q_n \leq q \leq \infty$,

$$||\chi_k f||_{L^q(M)} \leq Ck^{\sigma'(q,n)/2}||f||_{L^2(M)}. \tag{1.12}$$

(ii) Si $f \in L^2(M), 2 \leq q \leq q_n$,

$$||\chi_k f||_{L^q(M)} \leq Ck^{\sigma'(q,n)/2}||f||_{L^2(M)}, \tag{1.13}$$

Là aussi la constante C ne dépend que de M et P, et les inégalités (1.12) sont optimales.

Ce dernier théorème permet d'analyser le comportement asymptotique de la norme L^q de fonctions propres de P à norme L^2 fixée.

Remarquons enfin que, dans le cas de la sphère et de l'opérateur de Laplace-Beltrami, les résultats d'optimalité obtenus pour les χ_k permettent d'obtenir des estimations optimales sur les fonctions propres. Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère S^n sont les $-j(j+n-1),\ j = 0, 1, \ldots$. On note H_j l'opérateur de projection sur l'espace propre associé. On déduit des résultats précédents que

$$||H_j f||_{L^q} \leq Cj^{\sigma'(q,n)/2}||f||_{L^2}.$$

De plus, il n'existe aucun $\sigma_0 < \sigma'(q,n)/2$ tel que $\exists C, \forall j, ||H_j f||_{L^q} \leq Cj^{\sigma_0}||f||_{L^2}$. En effet, on remarque que, pour tout k, χ_k est une somme finie de H_j, le nombre de termes étant borné indépendamment de k et les indices j mis en jeu étant de l'ordre de k. On aurait alors

$$\forall k, ||\chi_k f||_{L^q} \leq Ck^{\sigma_0}||f||_{L^2},$$

ce qui est absurde par optimalité de (1.12).

Chapitre 2

Théorie spectrale et géométrie riemannienne

Nous allons commencer par présenter la notion de variété riemannienne et d'intégration sur une telle variété, puis nous justifierons la réduction de P introduite au **1.1**, et enfin nous développerons quelques notions de géométrie riemannienne que nous utiliserons lors de la construction de la paramétrix d'Hadamard.

2.1 Variétés riemanniennes

Pour une variété C^∞ M, on notera T_mM l'espace tangent à M en un point m, TM le fibré tangent, T_m^*M l'espace cotangent en m, T^*M le fibré cotangent, $\otimes^2 T_m^*M$ l'ensemble des éléments homogènes de degré 2 de l'algèbre tensorielle construite sur T_m^*M, et$\otimes^2 T^*M$ le fibré correspondant. On appelle section d'un fibré $\pi : E \to M$ toute application C^∞ $s : M \to E$ telle que $\pi \circ s = Id$. On notera $\Gamma(TM)$ et $\Gamma(T^*M)$ les espaces de sections des fibrés TM et T^*M.

Définition 2.1.1. *Une variété riemannienne est un couple (M, g) constitué d'une variété M et d'une section g de $\otimes^2 T^*M$ telle qu'en tout point $m \in M$ le tenseur $g(m)$ soit symétrique défini positif. En d'autres termes, une variété riemannienne est une variété M munie d'un produit scalaire C^∞.*

Soient $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{(1 \leq i \leq n)}$ les champs de vecteurs de coordonnées dans une carte locale autour de m. Soient $u, v \in T_mM$ avec $u = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|m}$ et $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|m}$. Alors

$$g_m(u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(m) u^i v^j,$$

où

$$g_{ij}(m) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|m}, \frac{\partial}{\partial x^j}_{|m}\right).$$

Nous allons maintenant introduire une mesure canonique.

Définition 2.1.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne. Soit (U, ϕ) une carte de M. Pour $m \in U$, on désigne par $\xi^1, \ldots, \xi^n$ les coordonnées locales de m induites par (U, ϕ) : $\phi(m) =$*

$(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Soit $g_{U,\phi}$ la matrice de g relative à (U, ϕ), et soit $|g_{U,\phi}| > 0$ son déterminant. Sur $\phi(U)$, on a la mesure positive $\mu_{U,\phi} = |g_{U,\phi}|^{1/2} d\xi^1 \cdots d\xi^n$. On définit alors sur U la mesure $\nu_{U,\phi} = \phi^{-1}(\mu_{U,\phi})$. On vérifie grâce à la formule de changement de cartes que la mesure définie localement est indépendante de la carte. On définit enfin par un argument de partition de l'unité une mesure positive v_g sur M telle que $v_g|_U = \nu_{U,\phi}$ pour toute carte (U, ϕ). Une telle mesure est de plus unique. On l'appelle la mesure canonique de (M, g).

Nous allons définir l'espace $L^2(M)$.

Définition 2.1.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et v_g sa mesure canonique. Soient f, h deux fonctions C^∞ sur M. On définit leur produit scalaire $(f, h) = \int_M f(x)h(x)\nu(dx)$, qui existe car M est compacte. $C^\infty(M)$ est ainsi muni d'une structure préhilbertienne réelle. On définit l'espace de Hilbert $L^2(M)$ comme le complété de $C^\infty(M)$ pour le produit scalaire introduit.*

On peut aussi définir sur une variété compacte les espaces de Sobolev, en passant par le tore : on peut en effet utiliser sur celui-ci une transformée de Fourier, et se ramener à une définition classique en Fourier des $H^s(T)$. Certains résultats sur les espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ restent valables dans le cas d'une variété compacte. On a en particulier le théorème de Rellich (admis), qui nous dit que l'inclusion $H^s(M) \hookrightarrow L^2(M)$ est compacte pour $s > 0$.

2.2 Réduction de P

Soient M et P comme au **1.1**. On suppose en plus que le symbole principal de P est défini positif. On a vu au lemme 1.4.4 qu'alors P est semi-borné inférieurement. Quitte à ajouter une constante, on supposera dans la suite que P est positif. On montre en utilisant le lemme de Lax-Milgram que $(P + I)$ est inversible, d'inverse $(P + I)^{-1} : L^2(M) \to H^2(M)$. Or, puisque M est une variété compacte, l'injection $H^2(M) \to L^2(M)$ est compacte. Par conséquent, $(P + I)^{-1} : L^2(M) \to L^2(M)$ est un opérateur compact. On note aussi qu'il est injectif par construction. $L^2(M)$ est un Hilbert, $(P+I)^{-1}$ est compact et autoadjoint, donc on peut appliquer le théorème spectral, qui nous donne une suite de valeurs propres distinctes $\mu_j, j = 0, 1, \ldots$ tendant vers 0 et de multiplicité finie, avec $\mu_j > 0$, et une base orthonormée de vecteurs propres associée à (μ_j) diagonalisant $L^2(M)$. Si $\phi_{j,k}$ est un vecteur propre associé à μ_j pour $(P + I)^{-1}$,

$$(P + I)^{-1}\phi_{j,k} = \mu_j \phi_{j,k},$$

alors $\phi_{j,k} \in D(P + I)$ domaine de l'opérateur. De plus, on a

$$P\phi_{j,k} = \left(\frac{1}{\mu_j} - 1\right) \phi_{j,k}.$$

$\phi_{j,k}$ est donc vecteur propre de P associé à la valeur propre $\lambda_j = (\frac{1}{\mu_j} - 1)$, et on remarque que, par régularité elliptique, $\phi_{j,k} \in C^\infty(M)$.

Montrons que la base des $\phi_{j,k}$ diagonalise P : soit $u = \sum_{j,k} u_{j,k}\phi_{j,k}$ dans le domaine de P; P étant autoadjoint, on obtient

$$< Pu, \phi_{j,k} >_{L^2} = < u, P\phi_{j,k} >_{L^2} = \lambda_j u_{j,k}.$$

Le domaine de P est alors

$$D(P) = \{u \in L^2 / \sum_{j,k} \lambda_j^2 |u_{j,k}|^2 < +\infty\},$$

et pour $u = \sum_{j,k} u_{j,k}\phi_{j,k} \in D(P)$ on a $Pu = \sum_{j,k} \lambda_j u_{j,k}\phi_{j,k}$.

On remarque aussi que la suite des valeurs propres (λ_j) tend vers $+\infty$. Enfin, si on note $\mathcal{H}_j$ l'espace propre de P associé à la valeur propre λ_j, on obtient :

$$L^2(M) = \oplus_j \mathcal{H}_j.$$

2.3 Géodésiques

2.3.1 Points critiques d'une fonctionnelle d'énergie

Si $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe C^∞ par morceaux, on définit son énergie E par :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 dt.$$

On définit aussi une variation à extrémités fixes de γ comme une fonction $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ pour un certain $\epsilon > 0$, telle que

- $\alpha(0,t) = \gamma(t)$,
- il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ de $[a,b]$ telle que α est C^∞ sur chaque bande $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$,
- $\alpha(u,a) = \gamma(a)$, $\alpha(u,b) = \gamma(b)$, $\forall u \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Pour une variation α, on notera $\overline{\alpha}(u)$ le chemin $t \longmapsto \alpha(u,t)$.

On suppose que sur chaque intervalle où α est C^∞ on se place dans une carte (x, U). On note alors $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$.

En notant $\frac{d\gamma}{dt}(t_i^+)$ (resp. $\frac{d\gamma}{dt}(t_i^-)$) le vecteur dérivée à droite (resp. à gauche) de γ en t_i, et en introduisant les symboles $[jk,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}\right)$, on obtient après calcul la formule de la variation première :

Théorème 2.3.1.

$$\begin{aligned} \frac{dE(\overline{\alpha}(u))}{du}_{|u=0} \quad = \quad & -\int_a^b \sum_{l=1}^n \frac{\partial \alpha^l}{\partial u}(0,t) \left\{ \sum_{r=1}^n g_{lr}(\gamma(t)) \frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n [jk,l](\gamma(t)) \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} \right\} dt \\ & - \sum_{i=0}^N < \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0,t_i), \frac{d\gamma}{dt}(t_i^+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i^-) > . \end{aligned}$$

On aboutit ainsi à des conditions sur les points critiques de E :

Corollaire 2.3.2. *Si $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe C^∞ par morceaux, alors γ est un point critique de E si et seulement si pour tout système de coordonnées (x,U), on a*

$$\sum_{r=1}^n g_{lr}(\gamma(t)) \frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n [jk,l](\gamma(t)) \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} = 0 \ \text{ pour } \gamma(t) \in U.$$

On introduit les symboles de Christoffel de la métrique, définis par les formules

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{l=1}^{n} g^{li}[jk,l] = \frac{1}{2}\sum_{l}\left\{\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right\} g^{li}.$$

On peut alors réécrire les équations des points critiques de E :

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} = 0, \quad (1 \leq i \leq n). \tag{2.1}$$

On peut en fait montrer(admis) qu'une courbe C^∞ par morceaux point critique de E est toujours C^∞.

Un calcul en coordonnées nous dit enfin que tout point critique de E est paramétré proportionnellement à la longueur d'arc, c'est à dire que la vitesse le long d'une telle courbe est constante.

Sur une variété riemannienne, on définit la notion de distance riemannienne entre x et y par $d(x,y) = \inf \int_0^1 ||\gamma'||\,dt$ où γ appartient à l'ensemble des chemins tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On admet qu'il s'agit bien d'une distance, et que la structure différentielle qu'elle définit coïncide avec celle de la variété. Le calcul des variations nous donne l'existence d'un chemin minimisant, et l'équation obtenue pour ce chemin nous dit que, à une reparamètrisation près, il existe une géodésique réalisant cette distance.

2.3.2 Équations locales d'une géodésique

On définit localement les géodésiques comme les solutions du système d'équations différentielles (2.1).

On remarque que si $t \longmapsto \gamma(t)$ est une géodésique, alors $t \longmapsto \gamma(ct)$ est encore une géodésique, par homogénéité du système (2.1).

Cette propriété va nous permettre d'améliorer les résultats donnés par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 2.3.3. *Soit $m_0 \in M$. Il existe un voisinage U de m_0 et il existe $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $m \in U$ et tout $v \in T_mM$ avec $||v|| < \epsilon$, il existe une unique géodésique $c_v :]-1,1[\rightarrow M$ avec $c_v(0) = m$ et $\frac{dc_v}{dt}(0) = v$. De plus, l'application $C : TU \times]-1,1[\rightarrow M$ définie par $C(v,t) = c_v(t)$ est C^∞.*

Démonstration : Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'il existe un voisinage U de m_0 et $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tels que, pour tout $m \in U$ et tout $v \in T_mM$ avec $||v|| < \epsilon_1$, il existe une unique géodésique $c_v :]-\epsilon_2, \epsilon_2[\rightarrow M$ vérifiant les conditions initiales demandées. Soit $\epsilon < \epsilon_1\epsilon_2$. Alors, si $||v|| < \epsilon$ et $|t| < 1$, on a $||v/\epsilon_2|| < \epsilon_1$ et $|\epsilon_2 t| < \epsilon_2$. On peut donc définir $c_v(t)$ par $c_{v/\epsilon_2}(\epsilon_2 t)$. $\square$

Nous désignerons dans la suite par c_v la géodésique maximale vérifiant les conditions initiales $c_v(0) = m$ et $\frac{dc_v}{dt}(0) = v$, pour $v \in T_mM$. L'ensemble $\Omega \subset TM$ des vecteurs v tels que $c_v(1)$ est bien défini est un ouvert de TM contenant les vecteurs nuls $0_m \in T_mM$ de chaque fibre.

2.3.3 Application exponentielle

Définition 2.3.4. *L'application exponentielle* $\exp : \Omega \subset TM \rightarrow M$ *est définie par*

$$\exp(v) = c_v(1).$$

On note $\exp_m$ *sa restriction à un espace tangent* T_mM.

On peut ainsi écrire pour la géodésique c_v : $c_v(t) = \exp_m(tv)$.

Proposition 2.3.5. *(i) L'application* $\exp : \Omega \to M$ *est* C^∞,
(ii) pour $m_0 \in M$, *l'application* $\Phi : \Omega \to M \times M$ *définie par*

$$\Phi(v) = \Big(\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)\Big)$$

est un difféomorphisme local d'un voisinage W *de* 0_{m_0} *dans* TM *sur un voisinage de* (m_0, m_0) *dans* $M \times M$.

Démonstration : La première assertion est une conséquence immédiate du théorème 2.3.3.

Pour démontrer la seconde, nous allons utiliser le théorème d'inversion locale. Dans une carte locale (U, ϕ) autour de m_0, l'application $\Phi : TU \approx U \times \mathbb{R}^n \to M \times M$ est donnée par $\Phi(v = (x, u)) = (x, \exp_x u)$. Calculons la matrice jacobienne de Φ en $(m_0, 0)$: à m_0 fixé et pour t suffisamment petit, on a $\Phi(m_0, tv) = (m_0, c_v(t))$, donc

$$T_{0_{m_0}}\Phi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Si on fixe maintenant $u \equiv 0$ et si on fait varier x, on obtient $\Phi(m, 0) = (m, m)$, donc

$$T_{0_{m_0}}\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

La matrice jacobienne de Φ est ainsi, dans la base précédente,

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ Id & Id \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant inversible, Φ est un difféomorphisme local autour de m_0. $\square$

En utilisant une partie de cette démonstation et en appliquant encore le théorème d'inversion locale, cette fois-ci à $v \longmapsto \exp_{m_0}(v)$ de différentielle égale à l'identité, on montre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application $\exp_{m_0} : B(0, \epsilon) \to M$ soit un difféomorphisme sur son image, qui contient un voisinage de m_0, où l'on note $B(0, \epsilon)$ la boule de centre 0 et rayon ϵ dans $T_{m_0}M$.

2.4 Coordonnées géodésiques normales

2.4.1 Conservation du produit scalaire

Soit $m_0 \in M$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\exp_{m_0} : B(0, \epsilon) \to M$ soit un difféomorphisme sur son image. Utilisons cette application comme carte locale autour de m_0 en choisissant une base orthonormée de $T_{m_0}M$: les coordonnées locales obtenues sont appelées coordonnées géodésiques normales.

On a vu que $c_v(t) = \exp_{m_0}(tv)$, donc, dans les coordonnées normales, les géodésiques partant de m_0 avec la vitesse v sont de la forme tv, i.e. sont des droites.

Par conservation de la vitesse le long d'une géodésique, on obtient $|v|_{g(x)} = |v|_{g(0)}$, i.e. $\sum g_{jk}(x)v_jv_k = \sum g_{jk}(0)v_jv_k$, ce qui en multipliant par t^2 nous donne

$$\sum g_{jk}(x)x_jx_k = \sum g_{jk}(0)x_jx_k, \tag{2.2}$$

où les x_i sont les coordonnées de x.

Lemme 2.4.1. *Soit $v \in B(0,\epsilon)$. On identifie $T_v(T_{m_0}M)$ à $T_{m_0}M$. Soit $w \in T_{m_0}M$. Alors*

$$< (T_v \exp_{m_0})(v), (T_v \exp_{m_0})(w) >_{\exp_{m_0}(v)} = < v, w >_{m_0} . \tag{2.3}$$

Démonstration : Si w est colinéaire à v, le résultat n'est autre que (2.2). On se ramène donc par linéarité au cas où w est normal à v. Soit $s : \mathbb{R} \to T_{m_0}$ une courbe C^∞ telle que $||s(t)|| = cte = c < \epsilon$, $s(0) = v$ et $s'(0) = w$. On pose $\alpha(u,t) = \exp_{m_0}(u \cdot s(t))$ pour $u \in (-\epsilon/c, \epsilon/c)$. On se place dans une carte locale. Un petit calcul nous mène alors à

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial u}\left\langle \tfrac{\partial\alpha}{\partial u}, \tfrac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle &= \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial\alpha^j}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^n g_{jk}\frac{\partial^2\alpha^k}{\partial u^2} + \sum_{k,l=1}^n [kl,j]\frac{\partial\alpha^k}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial u}\right) \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{\partial\alpha^k}{\partial u}\left(\sum_{j=1}^n g_{jk}\frac{\partial^2\alpha^j}{\partial t\partial u} + \sum_{j,l=1}^n [jl,k]\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est nul car $u \longmapsto \alpha(u,t)$ est une géodésique. On note I le second terme du membre de droite. Un calcul similaire nous donne $\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial u}\right\rangle = 2I$, or $\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t)$ est le vecteur tangent au temps u à la géodésique $u \longmapsto \exp_{m_0}(u \cdot s(t))$, donc sa norme est $||s(t)|| = c$. Ainsi $I = 0$, d'où $\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle$ est indépendant de u. Or $\alpha(0,t) = m_0$, donc $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t) = 0$. On obtient finalement :

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\right\rangle = 0, \quad \forall (u,t).$$

On en déduit en regardant en $(u,t) = (1,0)$ que (2.3) est vraie pour w normal à v. □

Or, par définition de la carte, $< (T_v \exp_{m_0})(v), (T_v \exp_{m_0})(w) >_{\exp_{m_0}(v)}$ a pour expression en coordonnées $\sum_{j,k} g_{jk}(\exp_{m_0}(v))v_j w_k$, et $< v, w >_{m_0} = \sum_{j,k} g_{jk}(m_0)v_j w_k$. Ceci étant vrai pour tout $w \in T_{m_0}M$, si x est un point de la géodésique issue de m_0 avec la vitesse v, on obtient, en notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées normales de x,

$$\sum_k g_{jk}(x)x_k = \sum_k g_{jk}(0)x_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

2.4.2 Coordonnées géodésiques avec paramètre

D'après la proposition 2.3.5, l'application $\exp : (y,v) \longmapsto (y, \exp_y(v))$ est un difféomorphisme local d'un voisinage V de la section nulle de TM sur un voisinage W de la diagonale dans $M \times M$. On l'utilise comme carte locale à y constant en identifiant, pour U voisinage de $y \in M$ suffisamment petit, TU à $U \times \mathbb{R}^n$. On obtient alors une expression de la métrique riemannienne dans les nouvelles coordonnées $(y,x) \in V$, $\sum g_{jk}(y,x)dx_j dx_k$. On remarque en fait comme au paragraphe précédent que ces coordonnées vérifient

$$\sum_k g_{jk}(y,x)x_k = \sum_k g_{jk}(y,0)x_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

On définit la distance riemanienne $s(x,y)$ pour $(x,y) \in W$ par la relation

$$s(\exp_y(\tilde{x}), y) = \left(\sum g_{jk}(y,0)\tilde{x}_j\tilde{x}_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une géodésique étant une droite dans les coodonnées normales, on obtient que $s(\exp_y(\tilde{x}), y) = \int_0^1 ||\tilde{x}||\,dt = ||\tilde{x}||$, ce qui est bien l'expression précédente.

Chapitre 3

La paramétrix d'Hadamard

Nous utiliserons dans la preuve des inégalités du type (1.7) des coordonnées locales, donc nous nous placerons ici dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. L'opérateur P considéré sera de la forme

$$P(x, D) = -\sum_{j,k} \partial_j g^{jk} \partial_k + \sum b_j \partial_j + c,$$

avec g^{jk}, b_j, et c C^∞ sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. P étant destiné à être elliptique, on supposera (g^{jk}) réelle définie positive. On notera dans la suite F le potentiel de Bessel (z désignant un élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) :

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (|\xi|^2 - z)^{-1} \, d\xi.$$

3.1 Premiers résultats sur F

Proposition 3.1.1. $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Démonstration : $1/(|\xi|^2 - z)$ ne s'annule jamais donc $(|\xi|^2 - z) \geq C > 0$ et même $(|\xi|^2 - z) \geq C|\xi|^2$. $1/(|\xi|^2 - z)$ est une fonction C^∞ bornée, donc $F \in \mathcal{S}'$. Une dérivée d'ordre k de $1/(|\xi|^2 - z)$ est de la forme $Q(\xi)/(|\xi|^2 - z)^{k+1}$, avec Q de degrée au plus k, d'où

$$\forall \xi \neq 0, |\xi^\beta D^\alpha (1/(|\xi|^2 - z))| \leq C_{\alpha\beta} |\xi|^{|\beta| - |\alpha| - 2}. \tag{3.1}$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur un voisinage de 0. On peut écrire $g = \xi^\beta D^\alpha(1/(|\xi|^2 - z)) = g\psi + g(1-\psi)$. $\hat{g}$ est alors continue pour $|\beta| - |\alpha| - 2 < -n$ car $g\psi$ est à support compact et $g(1-\psi)$ est alors localement intégrable d'après (3.1). D'où $D^\beta x^\alpha F$ est continu pour $|\beta| - |\alpha| - 2 < -n$, donc pour tout p, il existe α tel que $x^\alpha F$ a toutes ses dérivées d'ordre inférieur à p continues, donc $x^\alpha F \in C^p(\mathbb{R}^n)$, et $F \in C^p(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Ainsi $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. □

On remarque de plus que, pour $k \in [1, n]$, $\partial_k F$ est localement intégrable, comme on le voit en se ramenant à la transformée de Fourier de distributions homogènes.

Il est clair (cf en Fourier) que

$$(-\Delta - z)F = \delta_0. \tag{3.2}$$

Soit T un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si on fait le changement de variables $y = Tx$, on obtient les formules suivantes pour le Laplacien en coordonnées y :

$$\Delta_y = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où l'on note $(g^{jk}) = T^{-1}(T^{-1})^t$. En effet, $\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_k T_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}$, donc

$$\nabla_x = T^t \nabla_y.$$

D'où

$$\begin{aligned} < \Delta_y u, v > &= - < \nabla_y u, \nabla_y v > \\ &= - < (T^{-1})^t \nabla_x u, (T^{-1})^t \nabla_x v > \\ &= - < T^{-1}(T^{-1})^t \nabla_x u, \nabla_x v > \\ &= < (\textstyle\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k})(u), v > . \end{aligned}$$

F étant radiale, on écrira par abus de notation : $F(x) = F(|x|)$. Or $|y|^2 = |Tx|^2 = (T^t Tx|x) = \sum g_{jk} x_j x_k$, où l'on note (g_{jk}) l'inverse de (g^{jk}). On a ainsi $F(y) = F(|y|) = F(|x|_g)$ en notant $|x|_g^2 = \sum g_{jk} x_j x_k$.

On déduit alors de (3.2) que

$$(-\sum_{j,k} \partial_j g^{jk} \partial_k - z) F(|x|_g) = (\det g^{jk})^{\frac{1}{2}} \delta_0, \tag{3.3}$$

en remarquant que $\delta_0(Tx) = |\det T|^{-1} \delta_0(x)$ au sens où,

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(Tx) f(x)\, dx = |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x) f(T^{-1}x)\, dx = |\det T|^{-1} f(0),$$

par la formule de changement de variables.

3.2 Mise en oeuvre de la paramétrix en un point

Le symbole principal de P, $\sum g^{jk}(x)\xi_j\xi_k$, est défini sur le fibré cotangent, et on a supposé $(g^{jk}(x))$ définie positive, donc P induit une forme quadratique définie positive sur le fibré cotangent. La forme quadratique duale $\sum g_{jk}(x) dx_j dx_k$ sur le fibré tangent définit donc une métrique riemannienne.

On introduit maintenant les coordonnées géodésiques normales associées à la métrique induite par P au voisinage d'un point x_0 de X. On a vu au **2.4.1** qu'elles satisfont à la condition

$$\sum_k g_{jk}(x) x_k = \sum_k g_{jk}(0) x_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Ce qui implique $|x|_g = |x|_{g,0} = (\sum g_{jk}(0) x_j x_k)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $f \in C^1$. On a $\partial_k(f(|x|_{g,0}^2)) = 2\sum_i g_{ik}(0) x_i f'(|x|_g^2)$, d'où

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k g^{jk}(0) \partial_k (f(|x|_g^2)) &= 2(\textstyle\sum_k \sum_i g^{jk}(0) g_{ik}(0) x_i) f'(|x|_{g,0}^2) \\ &= 2 x_j f'(|x|_g^2) \\ &= \cdots = \textstyle\sum_k g^{jk}(x) \partial_k (f(|x|_g^2)). \end{aligned}$$

En choisissant f telle que $f(|x|^2) = F(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash 0)$, on voit que (3.3) avec (g) dépendant de x reste vraie quand $x \neq 0$ si l'on remplace $g^{jk}(0)$ par $g^{jk}(x)$. Montrons que (3.3) reste encore vraie pour $x = 0$. D'après ce qui précède, la différence $u = (\sum \partial_j (g^{jk}(x) - g^{jk}(0))\partial_k) F(|x|_g)$ est une distribution supportée par 0. Nous allons voir que, pour $\phi, \psi \in C_0^\infty$, si on pose $\phi_\epsilon(x) = \phi(\frac{x}{\epsilon})$, on a $< u, \psi\phi_\epsilon > \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$< u, \psi\phi_\epsilon >= \sum_{j,k} < (g^{jk}(x) - g^{jk}(0))\partial_k (F(|x|_g)), \partial_j (\psi\phi_\epsilon) > .$$

Or $\partial_j(\psi\phi_\epsilon) = (\partial_j\psi)\phi_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\psi(\partial_j\phi)(\frac{x}{\epsilon})$. On suppose que $\phi \equiv 0$ pour $x \geq r$. Alors, en notant $f_k = \partial_k(F(|x|_g)) \in L^1_{\text{loc}}$, on a

$$\begin{array}{rcl} | < u, \psi\phi_\epsilon > | & \leq & \sum_{j,k} \int_{B(0,r\epsilon)} |O(|x|) f_k (\frac{1}{\epsilon} C_1(j) + C_2(j))| \, dx \\ & \leq & C \sum_k \int_{B(0,r\epsilon)} |M\epsilon f_k \frac{1}{\epsilon}| \, dx \\ & \leq & CM \int_{B(0,r\epsilon)} |f| \, dx \\ & \leq & C'\epsilon. \end{array}$$

On choisit maintenant $\phi \in C_0^\infty$ telle que $\phi \equiv 1$ au voisinage de 0. Alors, u étant supportée par 0,

$$< u, \psi >=< u, \psi\phi_\epsilon + \psi(1 - \phi_\epsilon) >=< u, \psi\phi_\epsilon > \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$< u, \psi >= 0, \ \forall \psi \in C_0^\infty.$$

On a ainsi montré que $u = 0$, et (3.3) est donc vraie pour tout x.

Si $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est supportée dans un voisinage suffisamment petit de 0, on a, en notant $H(x) = F(|x|_g)$:

$$\begin{array}{rcl} (P - z)(\eta H) & = & \eta(0)(\det g^{jk})^{\frac{1}{2}} \delta_0 + (P\eta)H - 2\left(\sum (\partial_j H) g^{jk} (\partial_k \eta)\right) + \eta \sum_j b^j(x)\partial_j H \\ & = & \eta(0)(\det g^{jk})^{\frac{1}{2}} \delta_0 + R(x, D)H, \end{array}$$

avec

$$R(x, D) = P\eta + \sum_j \left(\eta b_j(x) - 2\sum_k (\partial_k\eta) g^{jk} \right) \partial_j,$$

donc $R(x, D)$ est de la forme $R(x, D) = \eta_0(x) + \sum_j \eta_j(x)\partial_j$ où les η_i sont des fonctions C_0^∞ ayant les mêmes propriétés de support que η et ne dépendant pas de z.

3.3 Paramétrix avec paramètre

En suivant la même méthode que précédemment mais à l'aide des coordonnées géodésiques dépendant d'un paramètre, on obtient les formules suivantes, où $s(x, y)$ est la distance riemannienne liée aux coordonnées géodésiques et définie sur un voisinage suffisamment petit de $(0, 0)$: si $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est supporté dans un voisinage suffisamment petit de $(0, 0)$, on a

$$(P(x, D) - z)\{\eta(x, y)F(s(x, y))\} = \eta(y, y)(\det g^{jk}(y))^{\frac{1}{2}} \delta_y(x) + R(x, y, D)F(s(x, y)), \quad (3.5)$$

où $R(x,y,D)$ est un opérateur différentiel du premier ordre dépendant du paramètre y, et de la forme $R(x,y,D) = \eta_0(x,y) + \sum \eta_j(x,y)\partial_j$, les fonctions η_j étant C_0^∞ et ayant les mêmes propriétés de support que η.

Nous allons maintenant utiliser les formules précédentes pour trouver un inverse approché de $(P-z)$.

Proposition 3.3.1. *Soit $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ supporté dans un voisinage suffisamment petit de $(0,0)$; on note $\tilde{\eta}(x) = (\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}}\eta(x,0)$. On a alors, pour $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:*

$$\tilde{\eta}(x)u(x) = T_1[(P(.,D)-z)u](x) + (T_2u)(x), \tag{3.6}$$

où les opérateurs T_i peuvent s'écrire $(T_if)(x) = \int K_i(x,x-y)f(y)\,dy$, avec les noyaux K_i de la forme

$$K_1(x,x-y) = \eta(x,x-y)F(s(x,y)) \tag{3.7}$$

et

$$K_2(x,x-y) = \beta_0(x,x-y)F(s(x,y)) + \sum \beta_j(x,x-y)\partial_jF(s(x,y)). \tag{3.8}$$

Les fonctions β_j sont là encore C_0^∞ et ont les mêmes propriétés de support que η.

Démonstration : En effet, soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose $\alpha(y,x) = \eta(x,x-y)$. α vérifie les hypothèses qui permettent de lui appliquer la formule (3.5) :

$$\begin{aligned}(P(y,D)-z)\{\alpha(y,x)F(s(x,y))\} \quad &= \quad \alpha(x,x)(\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}}\delta_x(y) \\ &\quad\; +(\alpha_0(y,x) + \textstyle\sum_j \alpha_j(y,x)\partial_j)F(s(x,y)).\end{aligned}$$

On pose

$$\beta_j(x,x-y) = -\alpha_j(y,x).$$

Vérifions qu'on a bien alors, pour des opérateurs T_i définis selon les formules (3.7) et (3.8) :

$$\int \phi(x)(T_1[(P(.,D)-z)u](x) + (T_2u)(x))\,dx = \int \phi(x)\tilde{\eta}(x)u(x)\,dx. \tag{3.9}$$

On note $I_1 = \int \phi(x)(T_1[(P(.,D)-z)u](x)\,dx$. En remplaçant T_1 par son expression et en utilisant le fait que P est autoadjoint, on obtient

$$I_1 = \int \phi(x) \int (P(y,D)-z)\{\eta(x,x-y)F(s(x,y))\}u(y)\,dy\,dx,$$

d'où

$$I_1 = \int \phi(x) \int \Big(\alpha(x,x)(\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}}\delta_x(y) + (\alpha_0 + \sum \alpha_j\partial_j)F(s(x,y))\Big)\,u(y)\,dy\,dx.$$

Or,

$$I_2 = \int \phi(x)(T_2u)(x)\,dx = -\int \phi(x)\int (\alpha_0(y,x) + \sum \alpha_j(y,x)\partial_j)F(s(x,y))u(y)\,dy\,dx,$$

donc

$$I_1 + I_2 = \int\int \phi(x)\eta(x,0)(\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}}\delta_x(y)u(y)\,dy\,dx = \int \phi(x)\tilde{\eta}(x)u(x)\,dx,$$

ce qui est bien (3.9). (3.6) est donc vraie au sens des distributions. $\square$

Chapitre 4

Coeur de la preuve

Nous noterons dans la suite $\alpha(q) = \sigma(q, n)$, $\alpha(\infty) = \sigma(\infty, n) = (n-1)/2$ et B_ϵ la boule de rayon ϵ de $\mathbb{R}^n$.

On suppose dans la suite que le symbole principal de P est défini positif.

4.1 Lemme principal

Nous voulons maintenant prouver le lemme suivant, dont nous avons vu au **1.4** qu'il impliquait le théorème 1.2.2 :

Lemme 4.1.1. $\exists C$, $\forall u \in C^\infty(M)$, $\forall k \geq 1$,

$$||u||_{L^q(M)} \leq Ck^{\alpha(q)-1}||(P-(k+i)^2)u||_{L^2(M)} + Ck^{\alpha(q)}||u||_{L^2(M)}, \tag{4.1}$$

$$||\chi_k u||_{L^\infty(M)} \leq Ck^{\alpha(\infty)-1}||(P-(k+i)^2)u||_{L^2(M)} + Ck^{\alpha(\infty)}||u||_{L^2(M)}. \tag{4.2}$$

Comme on le voit en utilisant le fait que M est compacte et une partition de l'unité pour se ramener à des coordonnées locales, les inégalités (4.1) seront une conséquence du lemme principal suivant :

Lemme 4.1.2. *Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, contenant l'origine. Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel du second ordre à coefficients C^∞ et dont le symbole principal est réel et défini positif. Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et $P(x, D)$, telle que pour $k \geq 1$,*

$$||u||_{L^q(B_\epsilon)} \leq Ck^{\alpha(q)-1}||(P(x,D)-(k+i)^2)u||_{L^2(B_{2\epsilon})} + Ck^{\alpha(q)}||u||_{L^2(B_{2\epsilon})}. \tag{4.3}$$

Nous utiliserons pour démontrer ce lemme la méthode de la paramétrix introduite dans la partie précédente. Nous noterons dans la suite

$$F_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(|\xi|^2-(k+i)^2)^{-1}\,d\xi,$$

c'est à dire le potentiel de Bessel pour $z = (k+i)^2$. Remarquons que, quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que $P(x, D)$ est égal à $-\Delta$ en $x = 0$.

On voit alors que les formules obtenues au **3.3** permettent de déduire le lemme 4.1.2 du lemme suivant :

Lemme 4.1.3. *Soit $P(x,D)$ comme dans le lemme 4.1.2, et soit $s(x,y)$ la distance riemannienne associée. Alors, pour tout $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ supporté dans un voisinage suffisamment petit de $(0,0)$, il existe une constante C ne dépendant que de η et P telle que*

$$\left|\left|\int \eta(x, x-y) F_k(s(x,y)) f(y)\, dy\right|\right|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C k^{\alpha(q)-1} ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.4}$$

$$\left|\left|\int \eta(x, x-y) \nabla_y F_k(s(x,y)) f(y)\, dy\right|\right|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C k^{\alpha(q)} ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.5}$$

En effet, soit ϵ assez petit pour que $\eta \in C_0^\infty(B_{2\epsilon} \times B_{2\epsilon})$ vérifie les hypothèses de (3.6) et du lemme 4.1.3. Quitte à prendre ϵ encore plus petit, on peut supposer que $(\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$ sur B_ϵ, car $(\det g^{jk}(0)) = 1$. Soit alors $\eta \in C_0^\infty(B_{2\epsilon} \times B_{2\epsilon})$ tel que $\eta \equiv 1$ sur $B_\epsilon \times B_\epsilon$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}||u||_{L^q(B_\epsilon)} &\leq ||(\det g^{jk}(x))^{\frac{1}{2}} u(x)||_{L^q(B_\epsilon)} \\
&\leq ||\tilde{\eta}(x) u(x)||_{L^q(B_{2\epsilon})} \\
&\leq ||T_1[(P(x,D) - (k+i)^2)u]||_{L^q(B_{2\epsilon})} + ||T_2 u||_{L^q(B_{2\epsilon})} \\
&\leq C k^{\alpha(q)-1} ||(P(x,D) - (k+i)^2)u||_{L^2(B_{2\epsilon})} + C k^{\alpha(q)} ||u||_{L^2(B_{2\epsilon})}.
\end{aligned}$$

On admettra les résultats suivants sur les potentiels de Bessel F_k, obtenus par des méthodes de type “phase stationnaire” :

Lemme 4.1.4. *Il existe une constante C telle que, pour $k \geq 1$, on ait les estimations suivantes :*
(i) Pour $n \geq 3$,

$$|F_k(x)| \leq C|x|^{-(n-2)}, \; |x| \leq 1/k, \tag{4.6}$$

pour n=2,

$$|F_k(x)| \leq C \log(1/|x|), \; |x| \leq 1/k, \tag{4.7}$$

et pour $n \geq 2$,

$$|\nabla F_k(x)| \leq C|x|^{-(n-1)}, \; |x| \leq 1/k. \tag{4.8}$$

(ii) Si $|x| \geq 1/k$ et $n \geq 2$,

$$F_k(x) = k^{(n-1)/2-1} e^{-ik|x|} |x|^{-(n-1)/2} a_1(kx), \tag{4.9}$$

$$\nabla F_k(x) = k^{(n-1)/2} e^{-ik|x|} |x|^{-(n-1)/2} a_2(kx), \tag{4.10}$$

pour des fonctions a_j C^∞ radiales satisfaisant à

$$|(\partial/\partial\rho)^m a_j(\rho)| \leq C_m |\rho|^{-m}. \tag{4.11}$$

4.2 Décomposition dyadique

Nous démontrons maintenant l'inégalité (4.4), grâce à (4.6), (4.7) et (4.9). Nous supposerons $\dim M \geq 3$ pour l'instant, le cas $\dim M = 2$ étant traité au **4.6.1**.

On va introduire une décomposition dyadique : soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}(\psi) \subset [\frac{1}{2}, 2]$ et $\forall t \geq 2, \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi(2^{-\nu}t) = 1$. On pose $\tilde{\psi}(t) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi(2^{-\nu}t)$. $\tilde{\psi} \equiv 0$ sur $[2, \infty[$. Pour $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ de support dans un voisinage de $(0,0)$ sur lequel $s(x,y)$ est défini, on pose :

$$L_0(x,y) = \tilde{\psi}(k|x-y|)\eta(x, x-y)F_k(s(x,y)),$$

et pour $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$$L_\nu(x,y) = \psi(2^{-\nu}k|x-y|)\eta(x, x-y)F_k(s(x,y)).$$

On souhaite montrer qu'il existe $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tel que pour tout $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant $\mathrm{supp}(\eta) \subset \{(x,y)/|x|, |y| < \epsilon\}$, il existe une constante C ne dépendant que de s et η telle que :

$$\left|\left|\int L_\nu(x,y)f(y)\,dy\right|\right|_{L^q} \leq C(2^{-\nu}k)^{-1/2}k^{\alpha(q)-1}||f||_2, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

On obtiendra alors l'inégalité (4.4) par sommation d'une suite géométrique. En effet, on remarque tout d'abord que si $\nu \geq \log_2 k + 1$, alors $2^{\nu-1} \geq k$, d'où $2^{-\nu}k|x-y| \leq \frac{1}{2}$ car $\epsilon \leq \frac{1}{2}$. Et donc $L_\nu \equiv 0$ si $\nu \geq \log_2 k + 1$. En sommant les inégalités, on obtient enfin comme coefficient de $||f||_2$ dans le membre de droite :

$$Ck^{-1/2}k^{\alpha(q)-1}\sum_{\nu=0}^{\log_2 k+2}(\sqrt{2})^\nu \leq Ck^{\alpha(q)-1}k^{-1/2}\frac{\sqrt{2}^{\log_2 k+2}-1}{\sqrt{2}-1} \leq C'k^{\alpha(q)-1}.$$

4.3 Le cas $\nu = 0$

Si ϵ est assez petit, on peut utiliser l'inégalité (4.6), et on obtient ainsi :

$$\left|\left|\int \tilde{\psi}(k|x-y|)\eta(x,x-y)F_k(s(x,y))f(y)\,dy\right|\right|_{L^q} \leq C\left|\left|\int h_k(x-y)f(y)\,dy\right|\right|_{L^q},$$

où $h_k(x) = \tilde{\psi}(kx)|x|^{-(n-2)}$.

On utilise l'inégalité de Young généralisée :

Théorème 4.3.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $1 < p,q,r < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, alors $\forall f,g,h$ mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$,*

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)g(y)h(x-y)\,dxdy \leq C||f||_{L^p}||g||_{L^q}A_r(h),$$

où

$$A_r(h) = \left(\sup_{\lambda>0}\lambda^r m\{x, h(x) > \lambda\}\right)^{1/r}.$$

On déduit de ce théorème le corollaire suivant, par dualité :

Corollaire 4.3.2. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $1 < p, q, r < +\infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, alors $\forall f, h$ mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$,*

$$\left|\left|\int f(x)h(x-y)\,dy\right|\right|_{L^q} \leq C||f||_{L^p} A_r(h).$$

Pour $p = 2$ et $q = p_n$, on a $r = \frac{n+1}{n}$. Calculons $a_k = m\{x, |h_k(x)| > \lambda\}$: si $|h_k(x)| > \lambda$ alors $|x| < C/k$ et $|x|^{-(n-2)}\tilde{\psi}(kx) > \lambda$, d'où $|x| < \lambda^{-\frac{1}{n-2}}$, et $a_k \leq \alpha(\min(C/k, 1/\lambda^{-\frac{1}{n-2}}))^n$. Après un petit calcul, on obtient $A_r(h_k) \leq k^{-\frac{n+2}{n+1}}$, or $-\frac{n+2}{n+1} = -\frac{1}{2} + (\alpha(q) - 1)$, d'où

$$\left|\left|\int h_k(x-y)f(y)\,dy\right|\right|_{L^q} \leq Ck^{-1/2}k^{\alpha(q)-1}||f||_{L^2}.$$

4.4 Le cas $\nu \geq 1$

Montrons que l'on peut conclure grâce au lemme suivant, que nous démontrerons au **4.5.3** :

Lemme 4.4.1. *Soit $a(x,y)$ une fonction dont le support est inclus dans $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / |x| < \frac{1}{4}, \frac{1}{2} < |y| < 2\}$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de $\phi_0(x,y) = |x-y|$ pour la topologie C^∞, tel que, si $\phi \in \mathcal{N}$, il existe C ne dépendant que de la taille d'un nombre fini de dérivées de a, tel que :*

$$\forall \lambda > 0, \quad \left|\left|\int e^{i\lambda\phi(x,y)} a(x,y) f(y)\,dy\right|\right|_q \leq C\lambda^{-n/q}||f||_2.$$

En effet, on remarque déjà que les L_ν sont nuls pour $|x-y| \leq 1/k$, donc on utilise les inégalités (4.9). On cherche maintenant à majorer

$$k^{\frac{n-1}{2}-1}\left|\left|\int e^{-iks(x,y)}|s(x,y)|^{-(n-1)/2} a_1(ks(x,y))\psi(2^{-\nu}k|x-y|)\eta(x, x-y)f(y)\,dy\right|\right|_q.$$

En posant $x' = 2^{-\nu}kx$, $y' = 2^{-\nu}ky$ et $\phi(x', y') = 2^{-\nu}ks(x,y) \in \mathcal{N}$, on se ramène à la majoration de

$$\left|\left|\int e^{-i2^\nu\phi(x',y')}|x'-y'|^{-(n-1)/2} a_1(2^\nu(x'-y'))\psi(|x'-y'|)\eta'(x', x'-y')f(2^\nu k^{-1}y')\,dy'\right|\right|_q,$$

avec un coefficient de la forme $k^{\frac{n-1}{2}-1}(\frac{2^{-\nu}}{k})^{n/q-(n-1)/2+n}$.

Si on pose $a(x') = a_1(2^\nu x')$, la fonction $a(x'-y')$ est bornée ainsi que ses dérivées sur le domaine d'intégration : sur celui-ci, $|x'-y'| \geq C$, or

$$\left|\frac{\partial^m a}{\partial u^m}(u)\right| \leq 2^{m\nu}\frac{C_m}{|2^\nu u|^m} \leq C_m|u|^{-m}.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.4.1, et on obtient comme majorant :

$$k^{\frac{n-1}{2}-1}\left(\frac{2^\nu}{k}\right)^{n/q-(n-1)/2+n} C(2^\nu)^{-n/q}||g||_2,$$

où $g(x) = f(\frac{2^\nu}{k}x)$.

$||g||_2 = (2^{-\nu}k)^{n/2}||f||_2$, le majorant s'écrit alors $2^{\nu/2}k^{-1/2}k^{(n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2})-1}||f||_2$. Or,

$$\alpha(q) = \frac{n-1}{2(n+1)} = n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2},$$

donc on a bien obtenu un majorant de la forme

$$C(2^{-\nu}k)^{-1/2}k^{(\alpha(q)-1)}||f||_2.$$

4.5 Le lemme de Carleson-Sjölin

4.5.1 Opérateurs d'intégrale oscillante non-dégénérée

Théorème 4.5.1. *Soit $\phi(x,y)$ une fonction réelle C^∞ non-dégénérée au sens suivant :*

$$\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial y_k}\right) \neq 0 \tag{4.13}$$

sur le support de $a(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Alors $\forall\lambda > 0$,

$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x,y)}a(x,y)f(y)\,dy\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{-n/2}||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.14}$$

Démonstration : On notera $T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x,y)}a(x,y)f(y)\,dy$. Une conséquence immédiate de (4.13) est que

$$|\nabla_x[\phi(x,y)-\phi(x,z)]| \approx |y-z| \tag{4.15}$$

quand $|y-z|$ est petit. En effet, $\nabla_x[\phi(x,y)-\phi(x,z)] = \left(\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x_j\partial y_k}\right)(y-z)+O(|y-z|^2)$.

En utilisant une partition de l'unité, on décompose $a(x,y)$ en un nombre fini de morceaux sur le support desquels (4.15) est vérifiée. On peut donc supposer dans la suite qu'il existe $c > 0$ tel que, sur le support de a, on ait :

$$|\nabla_x[\phi(x,y)-\phi(x,z)]| > c|y-z|. \tag{4.16}$$

On remarque d'autre part que

$$||T_\lambda f||_2^2 = \int\int K_\lambda(y,z)f(y)\overline{f(z)}\,dydz, \tag{4.17}$$

où l'on note

$$K_\lambda(y,z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x,y)-\phi(x,z)]}a(x,y)\overline{a(x,z)}\,dx.$$

Grâce à (4.16), on peut appliquer le lemme classique suivant, dit de la phase non-stationnaire :

Lemme 4.5.2. *Soient $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in C^\infty$ tel que $|\nabla_x\phi| \geq c > 0$ sur le support de a. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe C_N tel que*

$$\forall\lambda > 1, \left|\int e^{i\lambda\phi(x)}a(x)\,dx\right| \leq C_N(1+\lambda)^{-N},$$

où C_N ne dépend que de c si a et ϕ appartiennent à une partie bornée de C^∞ et si a est à support dans un compact fixé.

On obtient alors :

$$\forall N, |K_\lambda(y,z)| \leq C_N(1+\lambda|y-z|)^{-N}.$$

Donc, par un résultat classique sur la convolution, on voit que l'opérateur de noyau K_λ est continu de L^2 dans L^2 de norme $O(\lambda^{-n})$. On déduit ainsi de (4.17) :

$$||T_\lambda f||_2^2 \leq C\lambda^{-n}||f||_2^2.$$

□

4.5.2 Lemme de Carleson-Sjölin

Définition 4.5.3. *Soit $\mathcal{S} : y \in \mathbb{R}^{n-1} \longmapsto \phi(y) \in \mathbb{R}^n$ une hypersurface C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^n$. Pour y_0 fixé, il existe d'uniques points antipodaux $\pm\nu(y_0) \in S^{n-1}$ telles que*

$$\nabla_y < \phi(y), \nu(y_0) >= 0 \text{ en } y = y_0,$$

qui ne sont autres que les normales unitaires en $\phi(y_0)$ à $\mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{S}$ vérifie l'hypothèse de courbure si

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} < \phi(y), \nu(y_0) >\right) \neq 0 \text{ en } y = y_0. \tag{4.18}$$

Définition 4.5.4. *Soient $\psi(z,w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$ à valeurs réelles, et $a(z,w) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$. On suppose que*

$$rg\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial w_i \partial z_j}\right) \equiv n-1.$$

$S_{z_0} = \{\psi'_z(z_0,w)/(z_0,w) \in supp(a)\} \subset T^*_{z_0}\mathbb{R}^n$ est alors une hypersurface C^∞. Si S_{z_0} vérifie l'hypothèse de courbure, alors on dit que ψ vérifie la condition de Carleson-Sjölin.

Théorème 4.5.5. *Soit $a(z,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$ vérifiant la condition de Carleson-Sjölin. On pose $T_\lambda f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\psi(z,y)} a(z,y) f(y)\, dy$. Alors*

$$||T_\lambda f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \lambda^{-n/q} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}, \tag{4.19}$$

avec $1 \leq p \leq 2$ et $q = \frac{n+1}{n-1}p'$. De plus, si a et ψ sont respectivement C_0^∞ et C^∞ par rapport à un paramètre, alors tout est uniforme en le paramètre.

Démonstration : Puisque $a \in C_0^\infty$, l'inégalité (4.19) est évidente dans le cas $p = 1$ et $q = \infty$. Donc, grâce au théorème d'interpolation 1.4.2, on se ramène à montrer que (4.19) est vraie pour $p = 2$:

$$||T_\lambda f||_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{2(n+1)}} ||f||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{4.20}$$

Par dualité, il est équivalent de montrer que l'adjoint T_λ^* envoie $L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ avec les mêmes bornes. On remarque que :

$$\begin{aligned} ||T_\lambda^* g||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} T_\lambda^* g \overline{T_\lambda^* g}\, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} T_\lambda T_\lambda^* g \overline{g}\, dz \\ &\leq ||T_\lambda T_\lambda^* g||_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} ||g||_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

On pourra donc conclure que (4.20) est vraie si on a :

$$||T_\lambda T_\lambda^* g||_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} ||g||_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.21}$$

On s'est ainsi ramené à montrer une inégalité sur des fonctions faisant intervenir le même nombre de variables. On a $rg\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y_j \partial z_k}\right) \equiv n-1$, et on peut donc supposer que, en décomposant $z \in \mathbb{R}^n$ selon $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, on a localement autour de (z_0, y_0) :

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_k}\psi(x,t;y)\right) \neq 0. \tag{4.22}$$

Enfin, en utilisant une partition de l'unité, on voit que l'on peut supposer (4.22) vraie sur le support de a.

On définit alors les opérateurs

$$T_t^\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\psi(x,t;y)} a(x,t;y) f(y)\, dy.$$

On a en fait $(T_\lambda f)(x,t) = (T_t^\lambda f)(x)$. Calculons T_λ^* :

$$\begin{array}{rcl} < T_\lambda^* f, g >_{\mathbb{R}^{n-1}} & = & < f, T_\lambda g >_{\mathbb{R}^n} \\ & = & \int\int f(x,t)(T_t^\lambda g)(x)\, dxdt \\ & = & \int\int ((T_t^\lambda)^* f(\cdot,t))(x)\, dt\, g(x)\, dx, \end{array}$$

d'où

$$(T_\lambda^* f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ((T_t^\lambda)^* f(\cdot,t))(x)\, dt.$$

On en déduit

$$(T_\lambda T_\lambda^* g)(x,t) = (T_t^\lambda T_\lambda^* g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_t^\lambda((T_{t'}^\lambda)^* g(\cdot,t'))(x)\, dt'. \tag{4.23}$$

Montrons que (4.21) est une conséquence de l'estimation suivante :

$$||T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^* f||_{L^{q_n}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C|t-t'|^{-1+(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n})} \lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} ||f||_{L^{p_n}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{4.24}$$

En effet, en utilisant le fait que $||\int g(\cdot,t)\, dt||_{L^s} \leq \int ||g(\cdot,t)||_{L^s}\, dt$, on obtient grâce à (4.24) :

$$||(T_\lambda T_\lambda^* g)(\cdot,t)||_{L^{q_n}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t-t'|^{-1+(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n})} ||g(\cdot,t')||_{L^{p_n}(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt'.$$

En intégrant l'inégalité précédente élevée à la puissance q_n et en appliquant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (corollaire 4.3.2 avec h de la forme $1/|x|^\alpha$), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} ||T_\lambda T_\lambda^* g||_{L^{q_n}(\mathbb{R}^n)} & \leq & C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} |t-t'|^{-1+(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n})} ||g(\cdot,t')||_{L^{p_n}(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt'\right|^{q_n} dt\right)^{1/q_n} \\ & \leq & C'\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ||g(\cdot,t)||^{p_n}_{L^{p_n}(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt\right)^{1/p_n} \\ & \leq & C'\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} ||g||_{L^{p_n}(\mathbb{R}^n)}. \end{array}$$

Il nous reste à prouver (4.24). Nous allons à nouveau utiliser le théorème d'interpolation 1.4.2 entre les estimations $L^2 \to L^2$ et $L^1 \to L^\infty$.

Pour $L^2 \to L^2$, on peut d'après (4.22) utiliser le théorème 4.5.1, ce qui nous donne :

$$||T_t^\lambda f||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\lambda^{-\frac{n-1}{2}}||f||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

L'adjoint vérifie les mêmes bornes, donc :

$$||T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^* f||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\lambda^{-(n-1)}||f||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{4.25}$$

Essayons maintenant d'obtenir une estimation $L^1 \to L^\infty$. Remarquons tout d'abord que le noyau de $T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^*$ est

$$K_{t,t'}^\lambda(x,x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda[\psi(x,t;y)-\psi(x',t';y)]} a(x,t;y)\overline{a(x',t';y)}\, dy.$$

Montrons que

$$|K_{t,t'}^\lambda(x,x')| \leq C(\lambda|(x,t)-(x',t')|)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{4.26}$$

D'après la formule de Taylor, on a

$$\psi(x,t;y) - \psi(x',t';y) =< \nabla_{x,t}\psi(x,t;y), \big((x,t)-(x',t')\big) > +|(x,t)-(x',t')|g(z,z',y),$$

avec $g(z,z',y) = O(|(x,t)-(x',t')|)$. On note $\pm\nu(z_0,y_0)$ les normales unitaires en y_0 à S_{z_0}. Si $(x,t)-(x',t')$ est dans un voisinage conique suffisamment petit de $\pm\nu(z_0,y_0)$, on déduit (4.26) de la formule de la phase stationnaire, en supposant que (x',t') est proche de (x,t) quitte à réduire le support de a. En effet, notons

$$\alpha(z,z',u,y) =< \nabla_z\psi(z;y), u > +g(z,z',y).$$

On remarque que, si y est la variable et z, z', u les paramètres, y_0 est point critique non-dégénéré de α pour les valeurs $z = z_0$, $z' = z_0'$, $u = \pm\nu(z_0,y_0)$ des paramètres. On peut donc appliquer la formule de la phase stationnaire, et on obtient, si $(z, z', \frac{z-z'}{|z-z'|})$ est dans un voisinage suffisamment petit de $(z_0, z_0, \pm\nu(z_0,y_0))$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda|z-z'|\alpha(z,z',y)} a(z;y)\overline{a(z';y)}\, dy\right| \leq C(\lambda|(x,t)-(x',t')|)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Si $(x,t)-(x',t')$ est en dehors de ce voisinage, on a par définition de $\nu(x,t)$ qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$|\nabla_y[\psi(x,t;y) - \psi(x',t';y)]| \geq c|(x,t)-(x',t')|,$$

en supposant à nouveau que (x',t') est proche de (x,t). Le lemme de la phase non-stationnaire permet alors d'obtenir une estimation bien plus forte que (4.26) puisqu'on peut remplacer $(n-1)/2$ par n'importe quel entier N.

On déduit immédiatement de (4.26) que

$$||T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^* f||_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\lambda^{-\frac{n-1}{2}}|t-t'|^{-\frac{n-1}{2}}||f||_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{4.27}$$

Or

$$\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}} = (\lambda^{-(n-1)})^{\frac{n-1}{n+1}}(\lambda^{-\frac{n-1}{2}})^{\frac{2}{n+1}},$$
$$|t-t'|^{-1+(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q_n})} = (|t-t'|^{-\frac{n-1}{2}})^{\frac{2}{n+1}},$$

donc on déduit (4.24) de (4.25) et (4.27) par interpolation.

Remarquons que, en ce qui concerne la dépendance par rapport à un paramètre, la seule partie de la démonstration qui pourrait poser problème est l'application de la phase stationnaire, or on peut toujours faire varier un paramètre s au voisinage de s_0 si l'on suppose que, pour la valeur $s = s_0$ du paramètre, la phase admet un point critique non-dégénéré : on aura bien des inégalités uniformes en s sur un voisinage de s_0, et l'on se ramène à ce voisinage en découpant le support de a par partition de l'unité. $\square$

Corollaire 4.5.6. *Soient $a(z,w) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $\psi(z,w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tels que, à $t \in \mathbb{R}$ fixé et en notant $w = (y,t)$, l'application $\phi(z,y) = \psi(z;y,t)$ vérifie la condition de Carleson-Sjölin. Alors, $\forall \lambda > 0$,*

$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\psi(z,w)}a(z,w)f(w)\,dw\right|\right|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\lambda^{-n/q}||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.28}$$

avec $1 \leq p \leq 2$ et $q = \frac{n+1}{n-1}p'$.

Démonstration : On applique le théorème 4.5.5 à ϕ :

$$\begin{aligned} ||\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\psi(z,w)}a(z,w)f(w)\,dw||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \textstyle\int ||\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\psi(z;y,t)}a(z;y,t)f(y,t)\,dy||_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,dt \\ &\leq C'_p\lambda^{-n/q}\textstyle\int ||f(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt \\ &\leq C_p\lambda^{-n/q}||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder et en remarquant que l'on peut supposer f à support compact puisque a l'est. $\square$

4.5.3 Adaptation à notre cas

Nous sommes, avec les notations introduites précédemment, dans le cas où $\psi(z,w) = |z-w|$. Montrons que l'on peut localement décomposer w de manière à ce que ψ vérifie les hypothèses du corollaire 4.5.6. On rappelle que a est supposée à support dans K compact sur lequel $z \neq w$. Calculons tout d'abord le rang de la Hessienne mixte de ψ, $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j}\right)$. En remarquant que $\psi^2 = \sum_i (z_i - w_i)^2$, on obtient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j} = \frac{1}{2\psi}(-2\delta_{ij} + \frac{2}{\psi^2}(z_i - w_i)(z_j - w_j)).$$

On note $\alpha_i = (z_i - w_i)$. On a alors $(\alpha_i) \neq (0)$ et $\psi^2 = |\alpha|^2$, et on remarque que

$$((z_i - w_i)(z_j - w_j))_{i,j} = \alpha\alpha^t.$$

Finalement,

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j}\right) = \frac{1}{2\psi}(-2Id + \frac{2}{\psi^2}\alpha\alpha^t).$$

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P\alpha = |\alpha| e_1$. Alors

$$rg\left(\alpha\alpha^t - |\alpha|^2 Id\right) = rg\left(P(\alpha\alpha^t - |\alpha|^2 Id)P^t\right) = rg\left((P\alpha)(P\alpha)^t - |\alpha|^2 Id\right),$$

d'où

$$rg\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j}\right) = rg\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -|\alpha|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -|\alpha|^2 \end{pmatrix} = n-1.$$

$|\alpha| \neq 0$, donc on peut supposer, quitte à réduire le support de a et à faire une permutation sur les coordonnées, que $\alpha_n \neq 0$ sur le support de a. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i,j \leq n-1}$ a pour valeurs propres 0 et $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2$ si celui-ci est non nul. $\alpha_n \neq 0$, d'où $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 \neq |a|^2$, et la matrice $(a_i a_j - |a|^2 \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est donc inversible.

On décompose ainsi w en $w = (y, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, avec $rg\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial y_j}\right) \equiv n-1$. On reprend les notations introduites au **4.5.2**. On a alors

$$\phi'_z(z_0, y) = \frac{1}{\phi(z_0, y)} \begin{pmatrix} (z_0)_1 - y \\ \vdots \\ (z_0)_n - y \end{pmatrix} \in S^{n-1}.$$

On a donc $S_{z_0} = S^{n-1}$, et les normales en $u \in S_{z_0}$ ne sont autres que $\pm u$:

$$\nu(z_0, y_0) = \phi'_z(z_0, y_0).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier la condition de courbure pour ϕ, ce qui revient à montrer que

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} < \phi'_z(z_0, y), \phi'_z(z_0, y_0) >\right) \neq 0 \text{ sur le support de } a.$$

On pose $\beta(y) =< \phi'_z(z_0, y), \phi'_z(z_0, y_0) >$. D'après ce qui précède, $\nabla_y \beta(y_o) = 0$. En utilisant ce fait, on obtient dans le calcul des dérivées secondes

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \alpha(y)_{|y=y_0} &= \tfrac{1}{\phi^4(z_0,y_0)} \left(-\delta_{kj}\phi^2(z_0, y_0) + ((z_0)_j - (y_0)_j)((z_0)_k - (y_0)_k)\right) \\ &= \tfrac{1}{\phi^4(z_0,y_0)} \left(\alpha'(\alpha')^t - |\alpha|^2 Id_{n-1}\right), \end{aligned}$$

où $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. On a vu que cette dernière matrice était inversible par suite du choix des coordonnées, et ϕ vérifie donc la condition de Carleson-Sjölin.

La condition de Carleson-Sjölin étant une condition ouverte, on voit qu'il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de ψ pour la topologie C^∞ tel que si $\theta \in \mathcal{N}$, θ vérifie les hypothèses du corollaire 4.5.6. On a ainsi montré le lemme 4.4.1.

4.6 Adaptations à apporter pour $\dim M = 2$ et (4.5)

4.6.1 $\dim M = 2$

En regardant la démonstration dans le cas $\dim M \geq 3$, on voit que le seul changement interviendra dans la gestion du cas $\nu = 0$, et plus précisément au moment d'appliquer l'inégalité de Young généralisée, puisque c'est la seule partie de la démonstration où interviennent les estimations pour des x inférieurs à $1/k$. La majoration en $|x|^{-(n-2)}$ est remplacée par une majoration en $|\log(|x|)|$, qui est plus forte. Le calcul de $A_r(h_k)$ avec $h_k(x) = \tilde{\psi}(kx)|\log(|x|)|$ donne donc une borne meilleure que $k^{-\frac{n+2}{n+1}}$:

$$(\log k)^n k^{-\frac{n^2}{n+1}}.$$

4.6.2 Démonstration de (4.5)

Dans le cas de l'inégalité (4.5), il faut observer l'effet de la substitution de $\nabla_y F_k$ à F_k dans la démonstration. Pour $\nu \geq 1$, le changement est évident, puisque la différence entre les formules (4.9) et (4.10) est un facteur k, que l'on retrouve entre les inégalités (4.4) et (4.5). Pour $\nu = 0$, calculons $A_r(h_k)$ pour $h_k(x) = \tilde{\psi}(kx)|x|^{-(n-1)}$; de manière analogue à ce que l'on a fait au **4.3**, on se ramène au calcul suivant :

$$\sup_{\lambda>0}(\lambda(\min(\frac{1}{k}, \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{n-1}}}))^{\frac{n^2}{n+1}}) = k^{-\frac{1}{n+1}} = k^{-\frac{1}{2}} k^{\alpha(q)}.$$

On obtient ainsi une inégalité similaire à (4.12), avec un facteur k en plus dans le membre de droite, que l'on retrouve dans (4.5).

4.7 Démonstration de (4.2)

On va démontrer la variante du lemme 4.1.3 suivante :

Lemme 4.7.1. *Soient $P(x, D)$ et $s(x, y)$ comme dans le lemme 4.1.3. Alors, pour tout $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ supporté dans un voisinage suffisamment petit de $(0,0)$, il existe une constante C ne dépendant que de η et P telle que*

$$\left|\left|\int \eta(x, x-y) F_k(s(x, y)) f(y)\, dy\right|\right|_{L^\infty} \leq C k^{\alpha(\infty)-1} ||f||_{L^2} + C k^{-2} ||f||_{L^\infty}, \tag{4.29}$$

$$\left|\left|\int \eta(x, x-y) \nabla_y F_k(s(x, y)) f(y)\, dy\right|\right|_{L^\infty} \leq C k^{\alpha(\infty)} ||f||_{L^2} + C k^{-1} ||f||_{L^\infty}. \tag{4.30}$$

Les termes en $||f||_{L^\infty}$ qui n'apparaissaient pas au lemme 4.1.3 proviennent du cas $\nu = 0$, en suivant les notations introduites précédemment. En effet,

$$\left|\left|\int h_k(x-y) f(y)\, dy\right|\right|_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty} \left|\left|\int h_k(x-y)\, dy\right|\right|_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty} ||h_k||_{L^1},$$

avec h_k ayant des formes différentes selon les cas.

Pour (4.29), $h_k(x) = \tilde{\psi}(kx)|x|^{-(n-2)}$, et on trouve

$$||h_k||_{L^1} \leq C \int_{B(0, C/k)} |x|^{-(n-2)}\, dx \leq C \int_0^{C/k} r\, dr \leq C/k^2.$$

Pour (4.30), $h_k(x) = \tilde{\psi}(kx)|x|^{-(n-1)}$, et on trouve

$$||h_k||_{L^1} \leq \int_0^{C/k} dr \leq C/k.$$

Le cas $\nu \geq 1$ donne les termes qui apparaissaient déjà au lemme 4.1.3. En effet, le lemme de Carleson-Sjölin appliqué avec $p = 1$ et $q = \infty$ nous donne (pour la démonstration de (4.29) et dans le cas $\dim M \geq 3$) des inégalités de la forme :

$$\left|\left|\int L_\nu(x,y)f(y)\,dy\right|\right|_{L^\infty} \leq C(2^\nu/k)^{(n+1)/2}k^{\alpha(\infty)-1}||g||_1, \tag{4.31}$$

où $g = f(\frac{2^\nu}{k}x)$, donc $||g||_1 = 2^{-\nu}k||f||_1$. Or $||f||_1 \leq C||f||_2$, car on est à support compact (indépendant de k). On obtient donc un majorant de la forme $k^{\alpha(\infty)-1}C(2^{-\nu}k)^{1/2}||f||_2$. La sommation des termes de la suite géométrique donne le résultat : $\sum_1^{\log(k)+2}(2^{-\nu}k)^{1/2} \approx 1$. Les autres cas se traitent de la même manière.

À partir du lemme 4.7.1, on montre comme au **4.1** que

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(B_\epsilon)} \leq\ & Ck^{-2}||(P(x,D)-(k+i)^2)u||_{L^\infty(B_{2\epsilon})} \\ & +Ck^{-1}||u||_{L^\infty(B_{2\epsilon})} \\ & +Ck^{\alpha(\infty)-1}||(P(x,D)-(k+i)^2)u||_{L^2(B_{2\epsilon})} \\ & +Ck^{\alpha(\infty)}||u||_{L^2(B_{2\epsilon})}. \end{aligned}$$

En utilisant la compacité de M, on obtient pour k suffisamment grand :

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(M)} \leq\ & Ck^{-2}||(P(x,D)-(k+i)^2)u||_{L^\infty(M)} \\ & +Ck^{\alpha(\infty)-1}||(P(x,D)-(k+i)^2)u||_{L^2(M)} \\ & +Ck^{\alpha(\infty)}||u||_{L^2(M)}. \end{aligned}$$

On a vu au **1.5** que pour $k \in [2^m, 2^{m+1}]$, $||\chi_k f||_{L^2} \leq C(2^m)^{n(1/p-1/2)}||f||_{L^p}$. Pour $p = 1$ et par dualité, on obtient

$$||\chi_k f||_{L^\infty} \leq Ck^{n/2}||f||_{L^2}.$$

Or $\chi_k((P-(k+i)^2)u) = (P-(k+i)^2)\chi_k u$, d'où

$$||(P-(k+i)^2)\chi_k u||_{L^\infty} \leq Ck^{n/2}||(P-(k+i)^2)u||_{L^2}.$$

Donc, sachant que $n/2 - 2 < \alpha(\infty) - 1$,

$$\begin{aligned} ||\chi_k u||_{L^\infty(M)} \leq\ & Ck^{\alpha(\infty)-1}||(P-(k+i)^2)u||_{L^2} + Ck^{\alpha(\infty)-1}||\chi_k(P-(k+i)^2)u||_{L^2} \\ & +Ck^{\alpha(\infty)}||\chi_k u||_{L^2} \\ \leq\ & Ck^{\alpha(\infty)-1}||(P-(k+i)^2)u||_{L^2} + Ck^{\alpha(\infty)}||u||_{L^2}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[AlGe] **S. Alinhac, P. Gérard**
Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser CNRS Éditions (1991).

[Bes] **A. L. Besse**
Manifolds all of whose Geodesics are closed Springer-Verlag (1971).

[Car] **M. P. do Carmo**
Riemannian Geometry Birkhauser (1992).

[GHL] **S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine**
Riemannian Geometry Springer-Verlag (1987).

[Hor] **L. Hörmander**
The Analysis of Linear Partial Differential Equations, Vol. III Springer-Verlag (1985).

[LiLo] **H. Lieb, M. Loss**
Analysis GSM 14, AMS (1997).

[So1] **C. D. Sogge**
Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds Journal of Functional Analysis 77, 123-138 (1988).

[So2] **C. D. Sogge**
Fourier Integrals in Classical Analysis Cambridge University Press (1993).

[Spi] **M. Spivak**
Differential Geometry, Vol. I Publish or Perish (1979).

[StWe] **E. M. Stein, G. Weiss**
Fourier Analysis on Euclidean Spaces Princeton University Press (1971).

[Ste] **E. M. Stein**
Harmonic Analysis Princeton University Press (1993).