Université Paris VI
DEA de Probabilités
Filière Processus Stochastiques

Année 2002/2003

# Autour du modèle de Kac en théorie cinétique

Jonathan Le Roux

Mémoire de DEA sous la direction de Cédric Villani

Septembre 2003

# Table des matières

# Introduction

Je rappellerai tout d'abord l'interprétation probabiliste de l'équation de Boltzmann, et j'introduirai en particulier la notion de propagation du chaos ; je parlerai ensuite du modèle de Kac et des questions relatives aux inégalités du type entropie-dissipation d'entropie (conjecture de Cercignani) qui y sont liées, notamment autour du problème de la convergence vers l'équilibre.

## 1 Interprétation probabiliste de l'équation de Boltzmann

### 1.1 Quelques rappels concernant l'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution cinétique d'un gaz constitué d'un seul type de particules en moyenne altitude, c'est-à-dire dans une zone où le libre parcours moyen des particules est du même ordre que la taille typique des objets considérés (un avion par exemple).

On supposera que le gaz est contenu dans un domaine (borné ou non) $X \subset \mathbb{R}^N$, le cas $N = 3$ correspondant au cadre physique le plus naturel. On pourra par exemple considérer, en négligeant les effets de bord, que le gaz occupe tout l'espace.

En considérant que le gaz se rapproche d'un continuum puisqu'il est formé d'un très grand nombre de particules, l'état du gaz peut être décrit dans un *modèle cinétique* par une densité de probabilité $f(t, x, v)$ représentant au temps $t \geq 0$ la densité de présence de l'ensemble des particules dans l'espace des phases $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. A chaque instant $t \geq 0$, $f(t, ., .)$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ représente la position, $v \in \mathbb{R}^N$ représente la vitesse et $f(t, x, v)\, dx\, dv$ représente la quantité de particules dans l'élément de volume $dx\, dv$ centré en $(x, v)$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Il y a deux manières d'interpréter cette fonction de distribution : on peut voir la mesure $f(x, v)\, dx\, dv$ comme une approximation de la mesure empirique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, v_i)}$, mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v$, $\big((x_1(t), v_1(t)), \cdots, (x_n(t), v_n(t))\big)$ étant la configuration microscopique du gaz ; on peut aussi considérer une densité de probabilité symétrique $f^n$ sur l'espace $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)^n$ de toutes les configurations macroscopiques (modélisant un manque de connaissance sur la position exacte des particules), et $f$ comme une approximation de la première marginale de $f^n$. L'intérêt de ce modèle est qu'il permet d'exprimer les quantités macroscopiques mesurables, les "observables", comme des moyennes de quantités microscopiques. En particulier, au temps $t \geq 0$ et au point $x \in \mathbb{R}^N$, on peut définir la densité locale $\rho$, la vitesse macroscopique locale $u$ et la température locale $T$ du gaz par les formules

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v)\, dv,$$

$$\rho u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v)\, v\, dv,$$

$$\rho T(t,x) \;=\; \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v)|v-u(t,x)|^2\,dv.$$

En l'absence de forces extérieures et d'interactions entre les particules, d'après le principe de Newton chaque particule se déplace à vitesse constante le long d'une droite, et la densité de particules est donc constante le long des caractéristiques $dx/dt = v$, $dv/dt = 0$. On peut donc calculer $f$ au temps $t$ grâce à $f$ au temps $0$ : $f(t,x,v) = f(0,x-vt,v)$, autrement dit $f$ est solution faible de l'équation de libre transport

$$\frac{\partial f}{\partial t} \;+\; v\cdot\nabla_x f \;=0.$$

On souhaite maintenant prendre en compte les interactions entre les particules ; pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

1. les particules interagissent via des *collisions binaires* : une collision est le résultat de l'interaction microscopique de deux particules qui passent très près l'une de l'autre, ce qui entraîne une forte déviation de leurs trajectoires en un temps très court. Cette hypothèse implique implicitement que le gaz est suffisamment dilué pour pouvoir négliger l'effet des collisions faisant intervenir plus de deux particules.

2. les collisions sont *localisées* en temps et en espace : elles se déroulent sur des échelles de temps et d'espace très inférieures aux échelles typiques de description.

3. les collisions sont *élastiques* : la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont préservées par une collision. Par conséquent, si $v'$ et $v'_*$ désignent les vitesses de deux particules entrant en collision et si $v$ et $v_*$ désignent leurs vitesses juste après la collision, on a

$$\begin{cases} v'+v'_* \;=\; v+v_*, \\ |v'|^2+|v'_*|^2 \;=\; |v|^2+|v_*|^2. \end{cases}$$

On peut représenter les solutions de ce système sous la forme

$$\begin{cases} v' \;=\; \frac{v+v_*}{2}+\frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma \\ v'_* \;=\; \frac{v+v_*}{2}-\frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma \end{cases},$$

où le paramètre $\sigma$ décrit la sphère unité $S^{N-1}$ (même si l'on considère que les particules sont ponctuelles, heuristiquement $\sigma$ modélise l'influence de l'angle sous lequel une particule vient en toucher une autre, comme si celles-ci étaient des sphères de rayon très petit).

4. les collisions sont *microréversibles* : d'un point de vue probabiliste, la probabilité que les vitesses $(v',v'_*)$ soient changées en $(v,v_*)$ dans une collision est égale à la probabilité que les vitesses $(v,v_*)$ soient changées en $(v',v'_*)$.

5. les collisions satisfont l'hypothèse de *chaos moléculaire* : les vitesses de deux particules qui vont entrer en collision ne sont pas corrélées. Cette hypothèse introduit une dissymétrie entre le passé et le futur, car si les vitesses pré-collisionnelles n'étaient pas corrélées, alors les vitesses post-collisionnelles le seront certainement.

Sous ces hypothèses, Boltzmann montra en 1872 qu'il fallait ajouter dans le second membre de l'équation de transport libre un opérateur de collision quadratique modélisant l'effet des collisions sur la densité $f$ et agissant uniquement sur la dépendance en $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \;+\; v\cdot\nabla_x f \;= Q(f,f),$$

avec

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^N} dv_* \int_{S^{N-1}} B(v-v_*,\sigma)\,[f'f'_* - ff_*]\,d\sigma$$

où $f_*$, $f'$, $f'_*$ désignent respectivement $f(t,x,v_*)$, $f(t,x,v')$, $f(t,x,v'_*)$ et où $B$ est une fonction positive appelée *noyau de collision*; ce noyau de collision tient compte du fait que les collisions peuvent avoir des importances différentes selon la configuration relative des particules qui se rencontrent.

## 1.2 Problème de martingale non-linéaire

On cherche à généraliser la notion de solution de l'équation de Boltzmann en en donnant une formulation faible. Intégrons l'équation contre une fonction test $\phi$ :

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \phi(x,v)(\partial_t f + v\cdot\nabla_x f)\,dx\,dv = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \phi(x,v)\int_{S^{N-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^N} dv_* B(v-v_*,\sigma)\,[f'f'_* - ff_*]\,dx\,dv.$$

On transpose les opérateurs pour les faire agir sur $\phi$ et à l'aide d'une intégration par parties et du changement de variables $(v,v_*)\to(v',v'_*)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle P_t,\phi\rangle - \langle P_t, v\cdot\nabla_x\phi(x,v)\rangle = \left\langle P_t(dx,dv), \int \big(\phi(x,v')-\phi(x,v)\big)\,B(v-v_*,\sigma)f(t,x,v_*)\,dv_* d\sigma\right\rangle,$$

où $P_t(dx,dv) = f(t,x,v)dx\,dv$ et, $\mu$ étant une mesure sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ et $\phi$ une fonction test, $\langle\mu,\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\phi(x,v)\mu(dx,dv)$.

On peut voir cette équation comme l'équation d'évolution du flot de marginales d'un processus stochastique non-linéaire $(X_t,V_t)$ dans lequel une particule évolue selon le flot libre et dont la vitesse saute de $v$ à $v_*$ au point $x$ et au temps $t$ en suivant la loi $B(v-v_*,\sigma)f(t,x,v_*)\,dv_*\,d\sigma$. On peut donc considérer des conditions initiales plus générales que des densités, $P_0$ peut être une mesure de probabilité quelconque, un dirac par exemple.

Soient $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^{2N})$ l'espace de Skorokhod des fonctions càdlàg sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N}$, et $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^{2N}))$ l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^{2N})$ ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t\in]0,T]$. On admet que pour tout $P$ dans $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^{2N}))$ il existe une fonction mesurable $p(t,x,v)$ sur $]0,T]\times\mathbb{R}^{2N}$ telle que pour tout $t\in]0,T]$, $p(t,\cdot)$ est une densité de $P_t$. On appelle une telle fonction une version mesurable des densités de $P$. On notera par ailleurs $v'-v = h(v,v_*,\sigma)$. Le processus canonique $(X,V)$ sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ est le processus défini sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, considéré comme espace des aléas, à valeur dans $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ tel que pour tout $t\in[0,T]$, pour tout $(\xi,\omega)\in\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$,

$$(X,V)_t(\xi,\omega) = (\xi_t,\omega_t).$$

**Définition 1.1.** *Une mesure de probabilité $P\in\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^{2N}))$ est solution du problème de martingale non-linéaire $(\mathcal{M})$ si, pour toute fonction $\phi\in C_b^1(\mathbb{R}^{2N})$, si $(X,V)$ est le processus canonique sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, alors*

$$\phi(X_t,V_t) - \phi(X_0,V_0) - \int_0^t V_s\cdot\nabla_x\phi(X_s,V_s)\,ds$$

$$-\int_0^t \int_{S^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\phi(X_s, V_s + h(V_s, v_*, \sigma)) - \phi(X_s, V_s)\right] B(V_s - v_*, \sigma) p(s, X_s, v_*)\, dv_* d\sigma ds$$

*est une $P$-martingale, où $p(t,\cdot)$ est une version mesurable des densités du flot de marginales $(P_t)_{t\geq 0}$ et $P_0(dx, dv) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2N})$ est donnée.*

Cette définition ne dépend clairement pas du choix de la version mesurable de densités de $P$. On remarque par ailleurs qu'en prenant l'espérance dans l'expression précédente on retombe sur la version faible de l'équation de Boltzmann pour le flot des marginales. Enfin, les résultats d'existence et d'unicité sont, à l'instar de leur pendant analytique, très difficiles à obtenir, en particulier à cause de la localisation de l'interaction ; la densité $p(t, x, v_*)dv_*$ est difficile à contrôler en fonction de la marginale $P_t(dx, dv)$, notamment en ce qui concerne la continuité et la bornitude. On considère ici une équation plus simple, dite équation de Povzner (ou "mollified problem"), dans laquelle l'interaction n'est plus localisée, se rapprochant ainsi des méthodes numériques.

On se place dans le cas $N = 3$, physiquement le plus naturel. L'idée est de délocaliser en espace l'interaction qui apparaît dans l'équation de Boltzmann pour se ramener à un modèle de champ moyen. On introduit donc un noyau régularisant $I(x, y)$ et on remplace $f(t, x, v_*)$ par $\int I(x, y) f(t, y, v_*)dy$. L'exemple que nous étudierons ici, fréquemment utilisé en analyse numérique, est la méthode de la grille : l'espace $\mathbb{R}^3$ est partitionné en cubes $\Delta$ de côté $\delta$ et les particules n'interagissent qu'avec celles qui sont dans le même cube. Le noyau régularisant est donc

$$I^\delta(x, y) = \frac{1}{\delta^3} \sum_{\Delta} 1_{x\in\Delta} 1_{y\in\Delta},$$

l'opérateur de collision $Q$ est remplacé par

$$Q^\delta(f, f)(t, x, v) = \int \big(f(t, x, v') f(t, y, v'_*) - f(t, x, v) f(t, y, v_*)\big)\, B(v - v_*, \sigma) I^\delta(x, y)\, dy dv_* d\sigma,$$

et on obtient l'équation de Povzner avec un noyau de collision délocalisé $B(v - v_*, \sigma)I^\delta(x, y)$ :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q^\delta(f, f).$$

On suppose de plus $\sup_{v,v_*} \int B(v - v_*, \sigma)d\sigma = ||B||_\infty < +\infty$, hypothèse de cut-off angulaire uniforme en vitesse, et on a ainsi

$$\sup_{x,y,v,v_*} \int I^\delta(x, y) B(v - v_*, \sigma) d\sigma \leq \frac{||B||_\infty}{\delta^3}. \tag{1}$$

Remarquons que les résultats obtenus pour ce modèle délocalisé sont aussi valables dans le cas spatialement homogène : il est inutile alors de délocaliser...

On montre facilement, en utilisant le fait que l'opérateur de collision peut se voir comme la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique, que

$$||Q^\delta(f, f) - Q^\delta(g, g)||_{L^1(dx\, dv)} \leq C(B, \delta) ||f + g||_{L^1(dx\, dv)} ||f - g||_{L^1(dx\, dv)},$$

et on en déduit l'existence et l'unicité d'une densité solution sur $[0, T]$ grâce à une méthode de point fixe : on montre par une formule de type Duhamel que l'on a une application contractante sur $[0, \tau]$, $\tau$ ne dépendant que de $\delta$ et $||B||_\infty$, puis on recommence sur $[\tau, 2\tau]$, et ainsi de suite.

Au niveau du processus stochastique $(X_t, V_t)$, l'équation s'écrit

$$\mathbb{E}\left[\phi(X_t, V_t)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(X_0, V_0)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t V_s \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s) ds\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_0^t \int \left(\phi(X_s, V_s + h(V_s, v_*, \sigma)) - \phi(X_s, V_s)\right) B(V_s - v_*, \sigma) I^\delta(X_s, y) P_s^\delta(dy, dv_*) d\sigma\right],$$

avec $P_s^\delta = \mathcal{L}(X_s, V_s)$.

On peut formuler un problème de martingale similaire à celui vu précédemment :

**Définition 1.2.** *Une mesure de probabilité $P^\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^6))$ est solution du problème de martingale non-linéaire délocalisé $(\mathcal{M}^\delta)$ si pour toute fonction $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^6)$, si $(X, V)$ est le processus canonique,*

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t V_s \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s)\, ds$$

$$-\int_0^t \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} [\phi(X_s, V_s + h(V_s, v_*, \sigma)) - \phi(X_s, V_s)] I^\delta(X_s, y) B(V_s - v_*, \sigma) P_s^\delta(dy, dv_*) d\sigma ds$$

*est une $P^\delta$-martingale, où la non-linéarité apparaît dans $P_s^\delta = \mathcal{L}(X_s, V_s)$ et $P_0^\delta = P_0$ est donnée.*

Si la condition initiale a une densité, on peut montrer que le problème de martingale est bien posé :

**Théorème 1.3.** *Sous l'hypothèse (1) et si on suppose que $P_0(dx, dv) = f_0(x, v) dx dv$, alors il existe une unique mesure de probabilité $P^\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^6))$ solution du problème de martingale $(\mathcal{M}^\delta)$. De plus, pour tout $t \in [0,T]$, $P_t^\delta$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est l'unique solution $f^\delta$ de l'équation de Povzner.*

**Démonstration** : Admis (cf. [Mel]) □

Si l'on prend une loi quelconque pour $P_0$, on peut encore obtenir un résultat d'existence comme limite des lois d'un système de particules en interaction.

## 1.3 Systèmes de particules en interaction

L'idée est de remplacer la non-linéarité due à la présence de la marginale au temps $t$ dans l'équation du processus stochastique par une interaction de champ moyen créée par un grand nombre de particules : on ne considère plus une particule unique mais un système de particules interagissant, et on remplace la loi au temps $t$ d'une particule par la mesure empirique du système, qui dépend donc trajectoriellement des particules. Cette approche permet d'une part d'obtenir des résultats théoriques intéressants (propagation du chaos, existence de solutions...), mais aussi de simuler numériquement des solutions. On rappelle que la mesure empirique associée à une configuration $(X_1, \ldots, X_n)$ est la mesure $\hat{\mu}^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$. Si les $X_i$ sont aléatoires, c'est une mesure aléatoire.

On cherche donc à introduire des processus de Markov dans $\mathbb{D}([0,T], (\mathbb{R}^6)^n)$. Deux modèles classiques sont ceux de Nanbu et Bird. On notera $(x^n, v^n) = ((x_1, v_1), \ldots, (x_n, v_n))$ les points dans $(\mathbb{R}^6)^n$. On définit les applications $\mathbf{e_i} : h \mapsto \mathbf{e_i}.h = (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{R}^3)^n$ avec $h$ à la

$i$-ème coordonnée. Ci-dessous, $\phi$ désignera un élément de $C_b^1((\mathbb{R}^6)^n)$.
Le système de Nanbu est le processus de Markov dans $\mathbb{D}([0,T],(\mathbb{R}^6)^n)$ de générateur

$$L\phi(x^n,v^n)=\sum_{i=1}^n v_i\cdot\nabla_x\phi(x^n,v^n)+\frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j}\int[\phi(x^n,v^n+\mathbf{e_i}.h(v_i,v_j,\sigma))-\phi(x^n,v^n)]$$

$$I^\delta(x_i,x_j)B(v_i-v_j,\sigma)d\sigma.$$

Le système de Bird a lui pour générateur

$$L\phi(x^n,v^n)=\sum_{i=1}^n v_i\cdot\nabla_x\phi(x^n,v^n)+\frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j}\int\frac{1}{2}[\phi(x^n,v^n+\mathbf{e_i}.h(v_i,v_j,\sigma)+\mathbf{e_j}.h(v_j,v_i,\sigma))$$

$$-\phi(x^n,v^n)]I^\delta(x_i,x_j)B(v_i-v_j,\sigma)d\sigma.$$

On note dans les deux cas $Z^{\delta,n}=(X^{\delta,n},V^{\delta,n})=(Z^{\delta,1n},\dots,Z^{\delta,nn})$ le processus de Markov.

La différence essentielle entre ces deux modèles se trouve au niveau de l'approche que l'on a du problème. La non-linéarité qui apparaît dans le terme de saut du problème de martingale $(\mathcal{M}^\delta)$ est une non-linéarité de type champ moyen classique. Le choix naturel pour un système de particule associé donne le système de Nanbu. Mais cette approche correspond à ne regarder qu'une seule particule, à la faire évoluer à travers des collisions contre d'autres particules, les effets de ces collisions sur les autres particules n'étant absolument pas pris en compte. Si l'on souhaite garder l'interprétation physique de l'équation de Boltzmann, il faut symétriser le problème et on aboutit au système de Bird. Toutefois, au niveau de la marginale d'une particule, ces deux modèles sont identiques. La différence peut se lire au niveau des processus de Doob-Meyer apparaissant dans le problème de martingale : dans les deux cas, pour $\phi\in C_b^1(\mathbb{R}^6)$,

$$M_t^{\phi,\delta,in}=\phi(Z_t^{\delta,in})-\phi(Z_0^{\delta,in})-\int_0^t V_s^{\delta,in}\cdot\nabla_x\phi(Z_s^{\delta,in})\,ds$$

$$-\frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j}\int_0^t\int[\phi(X_s^{\delta,in},V_s^{\delta,in}+h(V_s^{\delta,in},V_s^{\delta,jn},\sigma))-\phi(X_s^{\delta,in},V_s^{\delta,in})]$$

$$I^\delta(X_s^{\delta,in},X_s^{\delta,jn})B(V_s^{\delta,in}-V_s^{\delta,jn},\sigma)d\sigma ds$$

est une martingale.

Si on calcule $\langle M^{\phi,\delta,in},M^{\phi,\delta,jn}\rangle_t$, on trouve 0 pour Nanbu mais par pour Bird. Ceci est dû au fait que deux particules interagissant sautent en même temps dans ce modèle. Toutefois, cette quantité tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

## 1.4 Simulation pour l'équation de Povzner

On souhaite simuler les systèmes de particules introduits précédemment. On présente ici la simulation de l'algorithme de Bird. Les particules se déplacent selon l'équation de transport libre entre les sauts, qui interviennent à des temps poissonniens et qui ont pour mesure de saut $\hat{B}$ qui dépend de la position atteinte par le système. On utilise une méthode de rejet pour simuler le processus. L'idée est de se ramener à une mesure positive de masse totale constante en ajoutant à la mesure de saut de la masse en zéro, ce qui ne change rien à l'opérateur de saut. On peut donc considérer $\frac{\Lambda^\delta}{n-1}\left(\frac{\hat{B}}{\Lambda^\delta}+\left(1-\frac{|\hat{B}|}{\Lambda^\delta}\right)\delta_0\right)$ au lieu de $\frac{\hat{B}}{n-1}$, où $|\hat{B}|$ est la masse totale de $\hat{B}$ calculée en la position atteinte par le système, bornée par $\Lambda^\delta$. Il y a $n$ particules et le taux de saut total pour les $n(n-1)/2$ interaction possibles est $n\Lambda^\delta/2$. Un processus de poisson de taux $n\Lambda^\delta/2$ donne la suite des temps de collision. A chacun de ces temps, on choisit uniformément une paire de particules qui vont interagir, on calcule leurs nouvelles positions selon le flot de transport libre, et on calcule la masse totale $|\hat{B}|$ pour la position atteinte par le système. On rejette alors le saut avec probabilité $1-|\hat{B}|/\Lambda^\delta$, et avec probabilité $|\hat{B}|/\Lambda^\delta$ on effectue un saut dont on calcule l'amplitude grâce à $\hat{B}/|\hat{B}|$, toutes les opérations étant indépendantes.

### 1.5 Propagation du chaos

La propagation du chaos est une notion de convergence d'un système de particules introduite par Kac ([Kac]) : il s'agit de la convergence de la loi d'un nombre $k$ fixé de particules vers le produit tensoriel $k$ fois d'une mesure de probabilité limite quand le nombre total de particules tend vers l'infini. Plus précisément, on donne la définition suivante :

**Définition 1.4.** *Soit $E$ un espace polonais, soit $Q \in \mathcal{P}(E)$ une probabilité sur $E$. Soit $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités telle que $Q^n \in \mathcal{P}(E^n)$. La suite $(Q^n)_n$ est dite $Q$-chaotique si pour tout entier $k$ fixé, $\forall f_1,\dots,f_k \in C_b(E)$,*

$$\lim_{n\to\infty}\langle Q^n, f_1\otimes\cdots\otimes f_k\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\rangle = \prod_{i=1}^{k}\langle Q, f_i\rangle.$$

Introduisons la notion de loi symétrique, ou d'échangeabilité des variables aléatoires :

**Définition 1.5.** *Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace $E$. On dit que ces variables aléatoires sont échangeables si pour toute fonction mesurable $\phi : E^n \to \mathbb{R}$ et pour toute permutation $\sigma$ de $[\![1,n]\!]$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi(X_1,\dots,X_n)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_\sigma(n))\right].$$

*La loi d'un $n$-uplet $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires est dite symétrique si ces variables aléatoires sont échangeables.*

Dans le cas de lois symétriques, la notion de propagation du chaos est en fait liée à la convergence en loi des mesures empiriques, comme le montre le théorème suivant (cf. [Szn]) :

**Théorème 1.6.** *Soit $(Q^n)_n$ une suite de lois symétriques sur $(E^n)_n$. Elle est $Q$-chaotique si et seulement si la mesure empirique des coordonnées converge en loi vers $Q$.*

**Remarque 1.7.** *La limite étant déterministe, les convergences en loi et en probabilité sont équivalentes.*

On se ramène donc dès qu'on a échangeabilité à montrer la convergence en loi de la suite $\hat{\mu}^n$. On aimerait donc avoir un critère de tension pour la suite de ces lois, qui sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Le théorème suivant nous permet de nous ramener à des critères de tension dans $\mathcal{P}(E)$, notion plus familière :

**Théorème 1.8.** *Soit $E$ un espace polonais et $(m^n)_n$ une suite de probabilités sur $\mathcal{P}(E)$. Alors la suite $(m^n)_n$ est tendue dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ si et seulement si la suite des intensités $(I(m^n))_n$ des $m^n$, définies par $I(m^n) \in \mathcal{P}(E)$,*

$$\forall f \in C_b(E), \;\; \langle I(m^n), f\rangle = \int_{\mathcal{P}(E)} \langle \mu, f\rangle m^n(d\mu),$$

*est tendue dans $\mathcal{P}(E)$.*

**Démonstration :** La démonstration repose essentiellement sur le théorème de Prokhorov, qui dit que dans un espace Polonais (métrique, séparable, complet) une suite de mesures de probabilité est tendue si et seulement si elle est relativement compacte. On pourra se reporter à [Szn] pour les détails de la démonstration. □

Dans le cas des mesures empiriques (et toujours sous l'hypothèse d'échangeabilité), un simple calcul nous donne $\langle I(m^n), f\rangle = \mathbb{E}_{Q^n}[f(X_1)]$, on est donc ramené à étudier la tension des lois de $X_1$ sous $Q^n$.

On peut montrer la convergence en loi des mesures empiriques pour l'équation de Povzner grâce à de tels arguments pour une condition initiale admettant un moment d'ordre 1 et si l'on peut montrer l'unicité dans le problème de martingale non-linéaire : on montre alors que le critère d'Aldous est vérifié pour obtenir la tension de la suite, puis on identifie la limite comme la solution du problème de martingale.

Mais on peut obtenir par une autre méthode un résultat plus fort, à savoir que sous la seule hypothèse de cut-off du noyau de collision délocalisé, on a convergence des mesures empiriques vers une probabilité $\hat{P}^\delta$ solution du problème de martingale non-linéaire $(\mathcal{M}^\delta)$. C'est l'objet du théorème suivant dû à Graham et Méléard ([Mel],[GrMe]). On notera $|\cdot|_T$ la norme de variation totale dans l'espace des mesures signées sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}([0,T],(\mathbb{R}^6)^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Théorème 1.9. (Graham-Méléard)** *Sous l'hypothèse de cut-off pour le noyau de collision délocalisé, soit $\Lambda^\delta = \frac{||B||_\infty}{\delta^3}$, soient $Z_0^{\delta,in}, 1 \leq i \leq n$, des variables aléatoires i.i.d. de loi $P_0$. Alors*
*(i) Il y a propagation du chaos : il existe une probabilité $\hat{P}^\delta$, solution du problème de martingale $(\mathcal{M}^\delta)$, telle que, pour tout $k$ fixé,*

$$|\mathcal{L}(Z^{\delta,1n}, \ldots, Z^{\delta,kn}) - (\hat{P}^\delta)^{\otimes k}|_T \leq k(k-1)\frac{e^{\Lambda^\delta T}}{n-1}.$$

*(ii) Les mesures empiriques $\hat{\mu}^{\delta,n}$ convergent vers $\hat{P}^\delta$ en loi et en probabilité comme mesure de probabilité sur $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^6)$, avec des estimations en $O(1/\sqrt{n})$.*

**Démonstration :**

**1)Les graphes d'interaction.**

On cherche tout d'abord à donner, à l'aide de graphes d'interaction, une représentation trajectorielle des processus $(Z^{\delta,1n}, \ldots, Z^{\delta,kn})$, pour $k \leq n$.

Au temps $T$, l'évolution de l'état d'une particule a été directement influencé par les particules avec lesquelles elle est rentrée en collision, et récursivement ces particules ont été influencées par d'autres particules, qui participent ainsi à l'évolution de l'état de la première particule, et ainsi de suite. On va donc construire, pour une particule $i$, en remontant dans le temps sur $[0,T]$, un graphe d'interaction contenant l'ensemble des collisions ayant influencé son évolution.

Un tel graphe est un sous-ensemble aléatoire de $[0,T]\times\{1,\dots,n\}$. On introduit tout d'abord des processus de Poisson indépendants $(N_{ij})_{1\le i<j\le n}$ de taux $\Lambda^\delta/(n-1)$. Pour $i<j$, $N_{ij}$ est une horloge aléatoire donnant les instants où $Z^{\delta,in}$ et $Z^{\delta,jn}$ sont autorisés à sauter simultanément et éventuellement interagir (on utilise pour modéliser les interactions une méthode de rejet comme au **1.4**). On imagine le temps comme étant vertical dirigé vers le haut et les particules étant en abscisses. On construit le graphe ayant pour racines $\{1,\dots,k\}$ comme suit : à chaque fois qu'un processus de Poisson $N_{ij}$, avec $i$ (ou $j$) déjà dans le graphe, saute, on met $j$ (ou $i$) dans le graphe et on relie $i$ et $j$ à ce temps-là. Une fois qu'un indice est dans le graphe, tout le segment vertical depuis son point d'"entrée" dans le graphe jusqu'à zéro appartient au graphe. On a ainsi défini récursivement un graphe d'interaction $g^n_{1,\dots,k}$ ayant pour racines $\{1,\dots,k\}$ (ce n'est pas un arbre car une particule peut influencer plusieurs fois une autre).

Une fois que l'on a atteint le temps 0, on construit une représentation trajectorielle du processus $(Z^{\delta,1n},\dots,Z^{\delta,kn})$ dans le sens direct du temps : toute l'information nécessaire se trouve dans le graphe d'interaction, et on peut ne considérer au temps $t$ que les indices se trouvant alors dans le graphe. On représente les particules au temps 0 par des variables aléatoires indépendantes de loi $P_0$, puis on suit le graphe pour obtenir les temps de saut (et d'interaction éventuelle). La construction du processus est expliquée au **1.4** ci-dessus.

**2)Le couplage.**

On va construire un ensemble de particules indépendantes, le coupler au système construit sur le graphe d'interaction et montrer qu'ils ne diffèrent pas trop. On obtiendra alors qu'à la limite les particules en interaction deviennent indépendantes. On pourrait considérer un nombre quelconque fini d'indices, mais pour simplifier on se limitera à deux indices $i$ et $j$. On prend deux copies indépendantes des processus de Poisson et des valeurs initiales comme dans la première partie, et on les distinguera par des exposants $i$ et $j$. On construit comme précédemment deux graphes d'interaction indépendants $G^{i,n}_i$ et $G^{j,n}_j$ et deux processus indépendants $Z^{i,n}_i$ et $Z^{j,n}_j$ sur ceux-ci. On cherche à construire un graphe d'interaction $G^n_{i,j}$ ayant pour racines $i$ et $j$ de manière à ce que les sous-graphes $G^n_i$ et $G^n_j$ issus de $i$ et $j$ soient aussi proches que possible de $G^{i,n}_i$ et $G^{j,n}_j$ respectivement, puis à choisir les valeurs initiales et les horloges de saut parmi les deux copies indépendantes de façon que le processus $(Z^{\delta,in},Z^{\delta,jn})$ (obtenu comme au **1)** sur $G^n_{i,j}$) soit aussi proche que possible de $(Z^{i,n}_i,Z^{j,n}_j)$, et $\mathcal{L}(Z^{\delta,in})=\mathcal{L}(Z^{i,n}_i)$ et $\mathcal{L}(Z^{\delta,jn})=\mathcal{L}(Z^{j,n}_j)$.

Pour tout couple $(k,l)$ d'indices, on doit choisir entre $N^i_{kl}$ et $N^j_{kl}$ pour définir $N_{kl}$. On démarre en $T$ et on remonte le temps ; on commence par regarder les indices $i$ et $j$ : pour chaque couple $(i,k)$ avec $k\neq j$ on pose $N_{ik}=N^i_{ik}$, et de même pour chaque couple $(j,l)$ avec $l\neq i$ on pose $N_{jl}=N^j_{jl}$. Les sous-graphes issus de $i$ et $j$ vont ainsi croître comme $G^{i,n}_i$ et $G^{j,n}_j$. Il y a toutefois un conflit pour le couple $(i,j)$; on doit alors décider quelle variable utiliser entre $N^i_{ij}$ et $N^j_{ij}$, et pour cela utiliser une règle de priorité. On peut par exemple résoudre ce genre de conflit par un pile-ou-face équitable. Si $i$ est choisi, on pose $N_{ij}=N^i_{ij}$, et alors $G^n_i$ coïncide avec $G^{i,n}_i$ pour le début de la croissance. On introduit par cette règle de priorité une différence soit entre $G^n_i$ et $G^{i,n}_i$ , soit entre $G^n_j$ et $G^{j,n}_j$. On appelle un tel conflit une interaction directe entre $i$ et $j$.

On construit les sous-graphes $G^n_i$ et $G^n_j$ comme les graphes $G^{i,n}_i$ et $G^{j,n}_j$, mais en étendant récursivement ces règles de priorité à tous les couples d'indices dont les éléments appartiennent chacun à un des deux sous-graphes. Ainsi, si une fois le graphe $G^n_{i,j}$ construit on constate que $G^n_i = G^{i,n}_i$ et $G^n_j = G^{j,n}_j$, c'est qu'il n'y a eu aucun conflit, et que les sous-graphes $G^n_i$ et $G^n_j$ sont disjoints. On peut alors choisir comme variables initiales pour la construction du processus sur $G^n_{i,j}$ les variables avec un exposant $i$ pour $G^n_i$ et celles avec un exposant $j$ pour $G^n_j$. Sur l'événement contraire $A^n_{ij} = \{G^n_i \neq G^{i,n}_i\} \cup \{G^n_j \neq G^{j,n}_j\} = \{G^{i,n}_i \cap G^{j,n}_j \neq \emptyset\}$, on résout à nouveau le conflit par un pile-ou-face équitable.

Par définition de la norme de variation totale, on obtient

$$|\mathcal{L}(Z^{\delta,in}, Z^{\delta,jn}) - \mathcal{L}(Z^{\delta,in}) \otimes \mathcal{L}(Z^{\delta,jn})|_T \leq 2P(A^n_{ij}).$$

De même, pour $k$ indices on obtient

$$|\mathcal{L}(Z^{\delta,1n}, \ldots, Z^{\delta,kn}) - \mathcal{L}(Z^{\delta,1n}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(Z^{\delta,kn})|_T \leq 2P\left(\cup_{1\leq p<q\leq k} A^n_{pq}\right).$$

Il nous reste à montrer que $P(A^n_{ij})$ est suffisamment petit.

**3) Chaînes d'interaction et estimation sur la convergence**

$A^n_{ij}$ ne se produit que si l'on a affaire avant d'atteindre 0 à un saut d'un processus de Poisson associé à un couple "conflictuel", c'est-à-dire dont l'un des éléments intervient dans l'"histoire" de $i$ et l'autre dans celle de $j$. Un tel événement se produit donc s'il existe une chaîne d'interaction entre $i$ et $j$ : il existe des entiers $m$ et $p$ et des indices $i_1, \ldots, i_m$ et $j_1, \ldots, j_p$ tels que, dans $G^{i,n}_i$, $i$ a branché sur $i_1$, puis $i_1$ sur $i_2$, et ainsi de suite jusqu'à $i_m$, et, dans $G^{j,n}_j$, $j$ a branché sur $j_1$, puis $j_1$ sur $j_2$, et ainsi de suite jusqu'à $G^{j,n}_j$. Puis après les branchements sur $i_m$ et $j_p$ s'est produit une interaction directe entre ces deux indices, i.e. $i_m$ a branché sur $j_p$ dans $G^{i,n}_i$ ou $j_p$ a branché sur $i_m$ dans $G^{j,n}_j$. Cette dernière étape se produit ainsi avec un taux deux fois plus élevé que le taux de branchement. On choisira une chaîne d'interaction avec le moins d'indices possible, pour laquelle $i, j, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_p$ sont deux à deux distincts. On définit la longueur de la chaîne d'interaction par $m + p + 1$.

On peut maintenant calculer une borne sur la probabilité $Q^n_T$ d'existence d'une chaîne d'interaction entre $i$ et $j$ sur $[0, T]$. On a $Q^n_T \leq \sum_{q\geq 1} Q^n_T(q)$, où $Q^n_T(q)$ est une borne sur la probabilité qu'une chaîne d'interaction de longueur $q$ se produise sur $[0, T]$. On calcule $Q^n_T(q)$ par récurrence. Pour $q = 1$, c'est la probabilité d'existence sur $[0, T]$ d'une interaction directe en $i$ et $j$, qui intervient avec un taux $2\frac{\Lambda^\delta}{n-1}$ comme on l'a vu ; on a donc

$$Q^n_T(1) \leq 1 - e^{-2\frac{\Lambda^\delta}{n-1}T} \leq 2\frac{\Lambda^\delta}{n-1}T.$$

Supposons que l'on ait calculé $Q^n_T(q-1)$, $q \geq 2$. Pour avoir une chaîne d'interaction de longueur $q$, on doit d'abord avoir la naissance d'une branche à partir de $i$ ou $j$ après un temps $t \in [0, T]$, puis cette nouvelle branche doit être reliée en un temps $T - t$ par une chaîne d'interaction de longueur $q - 1$ à celui de $i$ et $j$ qui n'a pas branché le premier. On obtient ainsi

$$Q^n_T(q) \leq \int_0^T Q^n_{T-t}(q-1) 2\Lambda^\delta e^{-2\Lambda^\delta t} dt.$$

On note $e_\mu$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\mu$. Alors, pour $q \geq 2$,

$$Q_T^n(q) \leq Q_.^n(q-1) * e_{2\Lambda^\delta}(T) \leq Q_.^n(1) * e_{2\Lambda^\delta}^{*(q-1)}(T).$$

Or $e_{2\Lambda^\delta}^{*k}(t) = (2\Lambda^\delta)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-2\Lambda^\delta t}$, donc on obtient finalement

$$\begin{aligned} Q_T^n &\leq Q_T^n(1) + 2\Lambda^\delta \int_0^T Q_{T-t}^n(q-1) \sum_{q\geq 2} \frac{(2\Lambda^\delta t)^{q-2}}{(q-2)!} e^{-2\Lambda^\delta t} dt \\ &\leq Q_T^n(1) + 2\Lambda^\delta \int_0^T (1 - e^{-2\frac{\Lambda^\delta}{n-1}(T-t)}) dt \\ &\leq 2\frac{\Lambda^\delta T + (\Lambda^\delta)^2 T^2}{n-1}. \end{aligned}$$

**4) L'arbre de Boltzmann limite**

On va utiliser à nouveau un argument de couplage entre le graphe d'interaction issu d'un seul indice pour un certain $n$ et un "arbre de Boltzmann" dont la construction est décrite ci-dessous. On souhaite montrer que les lois des processus $Z^{\delta,in}$ se rapprochent de la loi $\hat{P}^\delta$ du processus construit de manière similaire sur l'arbre de Boltzmann (on remarquera que la loi de ce processus est indépendante de $n$ et vérifie l'équation de Povzner).

Soient $n$ et $i$ donnés. On construit un arbre $T_i^n$ en s'inspirant de la construction de $G_i^n$. Chaque branche de l'arbre a une étiquette distincte qui est une suite finie d'entiers de $\{1,\ldots,n\}$ donnant la généalogie de la branche depuis la racine. On se donne une suite de processus de Poisson indépendants de taux $\frac{\Lambda^\delta}{n-1}$ et une suite de valeurs initiales indexées de la même manière. On part de $i$ et on remonte le temps à partir de $T$. La première fois qu'on rencontre un saut d'un processus de Poisson $N_{ij}^i$, la branche meurt et deux branches étiquetées $ii$ et $ij$ naissent. On construit l'arbre récursivement : à partir d'une branche $ii_1\ldots i_k$, au premier saut d'un $N_{i_kj}^{ii_1\ldots i_k}$, la branche meurt pour donner naissances à des branches étiquetées $ii_1\ldots i_ki_k$ et $ii_1\ldots i_kj$. Une fois que zéro est atteint, on utilise les valeurs initiales indexées par les mêmes indices que les branches qui atteignent zéro, et on construit ainsi des processus $\bar{Z}^{ii_1\ldots i_k,n}$ sur chaque branche comme précédemment. On obtient alors un processus $\tilde{Z}^{\delta,in}$ sur $[0,T]$ en rassemblant les processus $\bar{Z}^{i,n}, \bar{Z}^{ii,n}, \ldots, \bar{Z}^{i\ldots i,n}, \ldots$ indexés par les suites finies de $i$. Remarquons tout d'abord que la loi de $\tilde{Z}^{\delta,in}$ est indépendante de $n$ : en effet, un branchement ne donne naissance qu'à deux branches, on pourrait donc tout faire avec des suites finies de 1 et de 2, en remplaçant simplement le taux $\frac{\Lambda^\delta}{n-1}$ des processus de Poisson donnant les sauts par $(n-1)\frac{\Lambda^\delta}{n-1} = \Lambda^\delta$ ! L'intérêt d'utiliser des entiers de $\{1,\ldots,n\}$ n'apparaît que dans le couplage avec $G_i^n$.

On montrera directement au **1.6** que dans le cas homogène l'arbre de Boltzmann est "bien nommé", c'est à dire que la loi $\hat{P}^\delta$ du processus construit sur lui selon la méthode exposée ci-dessus est solution de l'équation de Boltzmann. On obtiendra ici ce résultat dans le cas général en montrant que la limite des $Z^{\delta,in}$, qui comme on va le montrer n'est autre que $\hat{P}^\delta$, vérifie l'équation de Povzner.

Il faut maintenant coupler l'arbre $T_i^n$ à un graphe $G_i^n$ pour coupler $\tilde{Z}^{\delta,in}$ et $Z^{\delta,in}$. L'idée est de ne regarder que les derniers indices de la suite d'indice. Il faudra bien sûr résoudre des conflits : ceux-ci apparaissent lorsque deux processus de Poisson ont mêmes indices $jl$ et sont associés à des branches en vie au même moment dont l'étiquette se termine par $j$ et $l$. On choisit alors uniformément parmi les processus de Poisson en conflit. Un tel conflit se produit lorsque (les derniers indices de) deux branches deviennent liées par une chaîne d'interaction. On appelera cet événement une boucle d'interaction. On cherche à borner la probabilité $L_T^n$ qu'une telle boucle d'interaction se produise sur $[0,T]$. $L_T^n \leq \sum_{k\geq 1} L_T^n(k)$, où $L_T^n(k)$ est une borne sur la probabilité qu'au bout de $k$ branchements dans l'arbre apparaisse un indice qui va être lié par une chaîne d'interaction avec un indice déjà présent comme dernier indice de l'étiquette d'une branche. On a donc

$$L_T^n(1) \leq \int_0^T Q_{T-t}^n \Lambda^\delta e^{-\Lambda^\delta t} dt,$$

car on doit avoir d'abord création de deux branches $ii$ et $ij$ en $t$ (ce qui correspond à un saut unique, or il y a $(n-1)$ processus de Poisson de taux $\frac{\Lambda^\delta}{n-1}$ et c'est donc équivalent à un unique processus de Poisson de taux $\Lambda^\delta$) puis conflit entre $i$ et $j$ sur $[0, T-t]$. De même, pour passer de $k$ à $k+1$, il faut que $i$ branche sur un $j$, puis qu'en $k-1$ branchements on obtienne un conflit avec $i$ ou $j$, donc

$$\begin{aligned} L_T^n(k) &\leq 2\int_0^T L_{T-t}^n(k-1)\Lambda^\delta e^{-\Lambda^\delta t} dt \\ &\leq 2L_.^n(k-1) * e_{\Lambda^\delta}(T) = 2^{k-1} L_.^n(1) * e_{\Lambda^\delta}^{*(k-1)}(T) \\ &\leq 2^{k-1} Q_.^n * e_{\Lambda^\delta}^{*k}(T). \end{aligned}$$

En sommant sur $k \geq 1$ on obtient

$$\begin{aligned} L_T^n &\leq \Lambda^\delta \int_0^T Q_{T-t}^n \sum_{k\geq 1} \frac{(2\Lambda^\delta t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\Lambda^\delta t} dt \\ &\leq \Lambda^\delta \int_0^T Q_{T-t}^n e^{\Lambda^\delta t} dt. \end{aligned}$$

En combinant cette borne avec celle trouvée à l'étape **3)**, on obtient la première partie du théorème.

**5) Convergence de la mesure empirique**

Cette convergence découle directement du théorème 1.6, de même que l'estimation sur la vitesse de convergence.

Il reste à vérifier que la limite vérifie bien l'équation de Povzner. Tout d'abord, la convergence des lois étant en norme de variation totale, il est facile de voir que la loi limite est bien dans $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^6))$. On va montrer que celle-ci est solution du problème de martingales $(\mathcal{M}^\delta)$. On part des problèmes de martingales associés aux systèmes de particules introduits au **1.3**. Pour $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^6), 0 \leq s_1, \ldots, s_q < s \leq t, g_1, \ldots, g_q \in C_b(\mathbb{R}^6)$, et pour $z = (x,v) \in \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^6)$ et $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^6))$, on considère l'application

$$\begin{aligned} H(z,\mu) \;=\; &\bigg(\phi(z_t) - \phi(z_s) - \int_s^t v_u \cdot \nabla_x \phi(z_u)\, du - \int_s^t \langle \mu_u, (\phi(x_u, v_u + h(v_u, v_*, \sigma)) \\ &-\phi(x_u,v_u)) I^\delta(x_u,y) B(v_u - v_*, \sigma) d\sigma \rangle du\bigg) g_1(z_{s_1}) \cdots g_q(z_{s_q}). \end{aligned}$$

$H$ étant mesurable et bornée,

$$\langle \mathcal{L}(Z^{\delta,in}), H(.,\hat{P}^\delta)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \hat{P}^\delta, H(.,\hat{P}^\delta)\rangle.$$

On peut voir par ailleurs en utilisant le théorème de convergence dominée et la convergence des mesures empiriques $\mu^{\delta,n}$ vers $\hat{P}^\delta$ que

$$\langle \mathcal{L}(Z^{\delta,n}), H(z^i, \mu^{\delta,n})\rangle - \langle \mathcal{L}(Z^{\delta,n}), H(z^i, \hat{P}^\delta)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où l'on note $z^i$ la $i$-ème coordonnée du vecteur $z = (z^1, \ldots, z^n)$ de $\mathbb{D}([0,T], (\mathbb{R}^6)^n)$. En considérant le problème de martingales associé au système de particules, on obtient que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}(Z^{\delta,n}), H(z^i, \mu^{\delta,n})\rangle &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \sum_{j\neq i} \mathbb{E} \int_s^t \int \Big(\phi(X_u^{\delta,in}, V_u^{\delta,in} + h(V_u^{\delta,in}, V_u^{\delta,jn}, \sigma)) \\
&\quad -\phi(X_u^{\delta,in}, V_u^{\delta,in})\Big) I^\delta(X_u^{\delta,in}, X^{\delta,jn}) B(V_u^{\delta,in} - V_u^{\delta,jn}, \sigma) d\sigma \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(M_t^{\phi,\delta,in} - M_s^{\phi,\delta,jn}) g_1(Z_{s_1}^{\delta,in}) \cdots g_q(Z_{s_q}^{\delta,in})\right].
\end{aligned}$$

Le deuxième terme à droite est nul car $M_t^{\phi,\delta,in}$ est une martingale, et le premier est un $O(1/n)$ car les termes de la somme sont bornés. En remarquant finalement que $\langle \mathcal{L}(Z^{\delta,n}), H(z^i, \hat{P}^\delta)\rangle = \langle \mathcal{L}(Z^{\delta,in}), H(., \hat{P}^\delta)\rangle$, on en déduit que $\langle \hat{P}^\delta, H(., \hat{P}^\delta)\rangle = 0$, et donc que $\hat{P}^\delta$ est solution du problème de martingales non-linéaire associé à l'équation de Povzner.

□

La convergence en norme de variation totale pour les probabilités sur $\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^6)$ implique en particulier la convergence pour la même norme des marginales temporelles uniformément en temps, et dans le cas où les mesures sont à densité, elle implique la convergence $L^1$ pour les densités.

## 1.6 Sommes de Wild

On cherche ici à montrer directement le résultat énoncé au cours de la démonstration du théorème 1.9, à savoir que la loi du processus (de Boltzmann) construit sur un arbre de Boltzmann vérifie bien dans le cas spatialement homogène l'équation de Boltzmann. Suivant la démonstration de [Szn], on va d'abord montrer que la somme de Wild est solution de l'équation de Boltzmann, puis qu'on peut écrire la loi du processus de Boltzmann sous la forme d'une somme de Wild.

On a vu que la loi du processus de Boltzmann était indépendante de $n$, on prend donc $n = 2$ et on suppose que le taux des processus de Poisson est 1. On suppose de plus que le noyau de collision $b(v - v_*, \sigma)$ est majoré par 1 (cut-off).

On introduit un opérateur $\circ$ comme suit : soit $Q^+$ un noyau markovien. Si $\mu_1$ et $\mu_2$ sont deux probabilités sur $\mathbb{R}^N$,

$$\langle \mu_1 \circ \mu_2, f\rangle = \langle \mu_1 \otimes \mu_2, Q^+ f\rangle.$$

$\mu_1 \circ \mu_2$ est alors une probabilité. On cherche une solution de

$$\begin{cases} \partial_t u = u \circ u - u, \\ u_{t=0} = u_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2}$$

Si on prend pour $Q^+$

$$Q^+ f(v, v_*) = \int_0^1 d\alpha \int_{S^{N-1}} (f(v_*) 1_{\alpha \le b(v - v_*, \sigma)} + f(v) 1_{\alpha > b(v - v_*, \sigma)}) d\sigma,$$

on retrouve l'équation de Boltzmann.

On a alors la

**Proposition 1.10.** *Pour tout $u_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, la somme de Wild*

$$u_t = e^{-t} \sum_{k \geq 1} (1 - e^{-t})^{k-1} \nu^k,$$

*où $\nu^1 = u_0$ et $\nu^{n+1} = \frac{1}{n} \sum \nu^k \circ \nu^{n+1-k}$, est solution de*

$$u_t - u_0 = \int_0^t (u_s \circ u_s - u_s) ds.$$

**Démonstration :** On pose $u_t^1 = u_0$, et pour $n \geq 1$,

$$u_t^{n+1} = e^{-t} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)} u_s^n \circ u_s^n ds.$$

On montre par récurrence que pour $n \geq 1$,

$$u_t \geq e^{-t} \sum_{k=1}^{n} (1 - e^{-t})^{k-1} \nu^k.$$

Les $\nu^k$ étant des mesures de probabilité, la somme de droite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. La différence des deux termes est une mesure positive dont la masse tend vers 0, donc $u_t^n$ converge aussi uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^+$ vers $u_t$ en norme de variation totale. En passant à la limite dans la formule de récurrence, on montre que $u_t$ est solution de (2). $\square$

On cherche à écrire la loi du processus de Boltzmann comme une somme de Wild. On remarque que $\nu^k$ est une combinaison convexe des différentes manières de parenthéser un monôme $u_0 \circ \cdots \circ u_0$ de degré $n$. Or, celles-ci sont en bijection avec les arbres ayant $n$ branches vivantes. Les coefficients de la combinaison convexe donnent les probabilités d'obtenir chacune des configurations. Comme il n'y a pas de transport, calculer un monôme parenthésé correspond à calculer la loi de la valeur du processus de Boltzmann à la racine de l'arbre associé.

On montre de plus par récurrence que la loi du nombre de branches vivantes au temps $t$ est $(e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1})_{n \geq 1}$. En conditionnant par rapport au nombre de branches vivantes au temps $t$, on obtient alors le résultat escompté.

# 2 Le modèle de Kac

## 2.1 Description du modèle

On étudie ici un modèle très simplifié introduit par Kac ([Kac]) comme une caricature de l'équation de Boltzmann. D'après Kac, ce modèle retient malgré sa simplicité les principales caractèristiques de l'équation de Boltzmann, ce qui sera encore plus clair au niveau de l'équation "limite" du système, que nous introduirons plus loin. Il souhaitait, en étudiant ce modèle, comprendre plus avant la dérivation de l'équation de Boltzmann et la dérivation du théorème

$H$ à partir du modèle particulaire, et s'intéresser à la convergence vers l'équilibre de la solution de l'équation de Bolztmann.

On se place en dimension 1 et dans le cas spatialement homogène. Le système est composé de $n$ particules. Soit un noyau de collision $\beta : [-\pi, \pi]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^+$. On suppose que c'est une fonction paire, et ici on fait en plus l'hypothèse que $\beta$ est intégrable (hypothèse de cut-off).

On notera dans la suite $M(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$, la Maxwellienne d'équilibre, $S^{n-1}(r) = \{(x_1, \dots, x_n), \sum x_i^2 = r^2\}$ et $S^{n-1} = S^{n-1}(1)$.

Un processus de Poisson de taux $n||\beta||_1$ donne les temps de saut, et à chaque fois qu'il sonne, on choisit deux particules $i$ et $j$ selon un tirage uniforme ; on calcule alors leurs nouvelles vitesses

$$(v_i', v_j') = R_\theta(v_i, v_j),$$

où $R_\theta$ est la rotation d'angle $\theta$ dans le sens trigonométrique dans le plan, $\theta$ étant choisi dans $[-\pi, \pi]$ selon $\beta(\theta)d\theta/||\beta||_1$. Ces "collisions" préservant l'énergie cinétique, l'espace des phases naturel est la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n})$, chacune des particules ayant ainsi en moyenne une énergie 1. L'opérateur associé est

$$L_n f^{(n)} = \frac{n}{C_n^2} \sum_{i<j} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f^{(n)} \circ R_\theta^{ij} - f^{(n)} \right] \beta(\theta) d\theta,$$

où $R_\theta^{ij}$ est la rotation d'angle $\theta$ dans le sens trigonométrique dans le plan $(i, j)$. Une équation du type

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} = L_n f^{(n)}$$

où $f^{(n)}(t, \cdot)$ est une densité de probabilité sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$ est appelée *équation maîtresse de Kac.*

**Remarque 2.1.** *Les différences avec le modèle de Boltzmann sont essentiellement*
- *l'abandon de la conservation de la quantité de mouvement,*
- *le passage de rotations à 6 dimensions à des rotations à 2 dimensions.*

Ce système de particules est associé comme dans ce qui précède à une équation "limite" non-linéaire, dont on aimerait montrer qu'elle a pour solution la limite quand $n$ tend vers l'infini de la marginale à une particule de la solution du système. Il convient ici de préciser la notion de marginale à une particule, la sphère $S^{n-1}$ n'étant pas un espace produit ; il s'agit en fait de l'espérance conditionnelle par rapport à l'une des coordonnées : soient $f^{(n)}$ une densité de probabilité sur la sphère $S^{n-1}$ et $\sigma_n$ la mesure uniforme sur $S^{n-1}$. La première marginale $f_1^{(n)}$ est l'unique fonction mesurable sur $S^{n-1}$ telle que, pour toute fonction mesurable $\Phi : x \mapsto \phi(x_1)$ définie sur $S^{n-1}$ ne dépendant que de la première coordonnée $x_1$, on a l'égalité

$$\int_{S^{n-1}} f^{(n)}(x)\Phi(x)d\sigma_n(x) = \int_{S^{n-1}} f_1^{(n)}(x_1)\phi(x_1)d\sigma_n(x).$$

L'équation limite est analogue de l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(t, v')f(t, v_*') - f(t, v)f(t, v_*) \right] \beta(\theta) d\theta dv_*, \quad t \geq 0, \ v \in \mathbb{R},$$

avec $(v', v'_*) = R_\theta(v, v_*)$.

On peut comme on l'a fait précédemment introduire un problème de martingale non-linéaire. Dans le cas plus général où $\beta$ n'est pas forcément intégrable mais admet un moment d'ordre 2, Graham et Méléard montrent à l'aide d'une astucieuse méthode de Picard que ce problème de martingale est bien posé si la condition initiale admet un moment d'ordre 2.

Le théorème 1.9 adapté au cas spatialement homogène nous donne la propagation du chaos pour le modèle de Kac :

**Théorème 2.2.** *(i)Soient $(V_0^{\beta,in})_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $P_0$. Alors on a propagation du chaos dans un sens fort : pour $T > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ donnés,*

$$|\mathcal{L}(V^{\beta,1n}, \ldots, V^{\beta,kn}) - (P^\beta)^{\otimes k}|_T \leq Kk^2 \frac{e^{||\beta||_1 T}}{n},$$

*où $P^\beta$ est l'unique solution du problème de martingale non-linéaire de loi initiale $P_0$ associé au modèle de Kac, et $K$ est une constante indépendante de $k, T, \beta, n$.*
*(ii)La mesure empirique définie par $\hat{\mu}^{\beta,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{V^{\beta,in}}$ converge en probabilité vers $P^\beta$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}))$, avec une estimation de convergence en $\sqrt{K\exp(||\beta||_1 T)}/\sqrt{n}$.*

Comme dans le cas de l'équation de Povzner, on peut obtenir plus simplement la convergence en loi (beaucoup plus faible que la convergence en norme de variation totale) des mesures empiriques en montrant la tension de la suite puis en identifiant la limite par le problème de martingale. C'est cette méthode que l'on retrouve dans Spohn ([Spo]).

## 2.2 Convergence vers l'équilibre

On souhaiterait obtenir des résultats de convergence vers l'équilibre pour la solution de l'équation limite, à partir de résultats sur le système de particules. On notera $H(f) = \int_{\mathbb{R}} f \log f$ l'entropie de $f$ et $H(f|M) = \int_{\mathbb{R}} f \log(f/M)$ l'entropie relative de $f$ par rapport à $M$.

La démarche est la suivante : à l'aide d'inégalités de type entropie-dissipation d'entropie au niveau du système de particules, on commence par montrer la convergence "en entropie" de la solution de l'équation limite vers la Maxwellienne d'équilibre. On en déduit ensuite la convergence $L^1$ grâce à la proposition suivante :

**Proposition 2.3.** *Il existe une constante $C$ telle que pour toute $f$ densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ de variance 1, on a*

$$\int |f - M| dv \leq C\left(H(f|M) + H(f|M)^{1/2}\right).$$

**Remarque 2.4.** *On en déduit que si $(f_t)_{t\geq 0}$ est une suite de densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ de variance 1 et telle que $H(f_t)$ tend vers $H(M)$ quand $t$ tend vers l'infini , alors $f$ tend vers $M$ dans $L^1$. En effet, $\lim_{t\to+\infty} H(f_t) = H(M)$ est équivalent à $\lim_{t\to+\infty} H(f_t|M) = 0$, car pour une densité de probabilité $g$, $\int g \log M$ ne dépend que de la variance de $g$. Or $f$ et $M$ ont même variance égale à 1, donc $H(f_t|M) = H(f_t) - H(M)$ pour tout $t \geq 0$.*

**Démonstration** : Introduisons la fonction

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leq z \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq z. \end{cases}$$

Une étude simple de la fonction $h : x \mapsto x \log x - x + 1 - cg(|x-1|)|x-1|$ montre que si $c$ est choisi suffisamment petit, $h$ est positive sur $\mathbb{R}^+$. En prenant $x = f/M$, on obtient

$$f \log f - f \log M + M - f \geq cg\left(\frac{|f-M|}{M}\right)|f-M|.$$

On intègre cette inégalité pour obtenir

$$H(f|M) \geq c\left(\int_G |f-M|\, dv + \int_P |f-M|^2 M^{-1}\, dv\right),$$

où $G$ et $P$ désignent les ensembles sur lesquels $|f-M|$ est plus grand (respectivement plus petit) que $M$.

Par Cauchy-Schwartz, on peut écrire que

$$\int_P |f-M|\, dv \leq \left(\int_P |f-M|^2 M^{-1}\, dv\right)^{1/2} \left(\int_P M\, dv\right)^{1/2} \leq \left(\int_P |f-M|^2 M^{-1}\, dv\right)^{1/2}.$$

Enfin,

$$\int |f-M|\, dv = \int_G |f-M|\, dv + \int_P |f-M|\, dv \leq C\left(H(f|M) + H(f|M)^{1/2}\right).$$

□

## 2.3 Conjecture de Cercignani

Pourquoi s'intéresser aux inégalités de type entropie-dissipation d'entropie ? Dans le cadre général de l'équation de Boltzmann, on définit les fonctionnelles d'entropie

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \log f$$

et de dissipation d'entropie

$$D(f) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^{2N}\times S^{N-1}} B(v-v_*, \sigma)\,[f'f'_* \,-\, ff_*] \log \frac{f'f'_*}{ff_*}\, d\sigma dv_* dv.$$

On remarque que $D(f) \geq 0$ car la fonction $(x,y) \mapsto (x-y)(\log x - \log y)$ est positive, et si $B > 0$ presque partout alors $D(f) = 0$ si et seulement si $f$ est une Maxwellienne (cf [CIP]).

Dans le cas spatialement homogène, le théorème $H$ de Boltzmann relie les fonctionnelles $H$ et $D$ le long d'une solution $(f_t)$ de l'équation de Boltzmann par la relation

$$\frac{d}{dt}H(f(_t)) = -D(f_t) \leq 0.$$

$H$ est donc strictement décroissante le long des solutions de l'équation, sauf si l'on a atteint un état d'équilibre, à savoir une Maxwellienne.

La densité, la vitesse macroscopique et la température étant conservées dans le cas spatialement homogène, on peut construire une Maxwellienne $M$ ayant même $\rho, u, T$ que toute solution $f$ associée à une condition initiale donnée :

$$M(v) = M^f(v) = \frac{\rho e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{N/2}}.$$

Par ailleurs, on remarque que pour tous $x, y \geq 0$, $x \log x - x \log y + y - x$ est positif. De plus, comme on l'a vu dans le cas du modèle de Kac, $\int_{\mathbb{R}^N} g \log M \, dv$ ne dépend que des trois premiers moments de $g$, et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \log M \, dv = \int_{\mathbb{R}^N} M \log M \, dv,$$

ou encore

$$H(f) - H(M) = \int_{\mathbb{R}^N} f \log \frac{f}{M} \, dv = H(f|M),$$

l'entropie relative de $f$ par rapport à $M$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \log f \, dv - \int_{\mathbb{R}^N} f \log M \, dv + \int_{\mathbb{R}^N} (M - f) \, dv = H(f) - H(M) \geq 0.$$

$H$ est donc strictement décroissante si $f \neq M$ et est borné inférieurement par $H(M)$. Il est tentant de penser que $H(f)$ va converger vers $H(M)$. Ce n'est hélas pas si évident et on aimerait pour pouvoir conclure disposer d'inégalités de type entropie-dissipation d'entropie :

$$D(f) \geq \Theta(H(f|f_\infty)),$$

où $H \mapsto \Theta(H)$ est une fonction continue strictement positive quand $H > 0$. On aurait alors en effet en notant $H(t) = H(f(t, \cdot)|f_\infty)$ une inégalité différentielle

$$-\frac{d}{dt} H(t) \geq \Theta(H(t)),$$

dont on déduit que $H(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, avec des taux de convergence explicites si la fonction $\Theta$ est suffisamment connue. Il est hélas le plus souvent très difficile ou impossible d'obtenir des inégalités aussi fortes, et l'on s'autorise plutôt une dépendance de $\Theta$ en fonction de certaines quantités relatives à $f$, comme sa norme dans des espaces de Lebesgue (avec poids), sa stricte positivité, sa régularité, etc... autant d'estimations a priori qui devront être démontrées indépendamment. C'est dans cette perspective que Cercignani énonça au début des années 80 une conjecture selon laquelle une équation de type entropie-dissipation d'entropie linéaire était vérifiée :

**Conjecture 2.5. (Cercignani)** *Soit $B \geq 1$ un noyau de collision et $D$ la fonctionnelle de dissipation d'entropie associée. Soit $f(v)$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^N$ de température unité, et $M$ la Maxwellienne associé. Alors, il existe $\lambda(f) > 0$ dépendant de $f$ uniquement à travers certaines estimations de moments, de régularité de Sobolev, de borne inférieure, telle que*

$$D(f) \geq 2\lambda(f) H(f|M).$$

Cette conjecture fut en fait contredite par Bobylev et Cercignani (cf [BoCe]) : ils construisirent une famille de fonctions pour lesquelles cette inégalité est fausse pour un $\lambda$ uniforme alors que ces fonctions possèdent des normes $L^p$ ou $H^k$ (quels que soient $p, k$) uniformément bornées, des moments d'ordre $k$ (quel que soit $k$) uniformément bornés, et sont bornées inférieurement par une Maxwellienne fixée. Ces contre-exemples sont obtenus en ajoutant à la fonction d'équilibre un saut très petit à des vitesses très élévées.

S'approchant de bornes linéaires, Toscani et Villani prouvèrent en 1999 les premières bornes polynomiales : si le noyau de collision vérifie

$$B(v - v_*, \sigma) \geq K_B(1 + |v - v_*|)^{-\beta} \quad (K_B > 0, \ \ \beta > 0),$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$D(f) \geq K_\varepsilon(f) H(f|M^f)^{1+\varepsilon}.$$

Puis Villani a montré dans [Vi2] que la conjecture de Cercignani était vraie pour un noyau de collision super-quadratique au sens où

$$B(v - v_*, \sigma) \geq K_B(1 + |v - v_*|^2),$$

et a étendu les précédents résultats au cas où le noyau s'annule pour $v = v_*$, permettant ainsi de traiter les cas physiquement intéressants. Il a montré dans le même article des inégalités de type entropie-dissipation d'entropie au niveau de l'équation maîtresse d'un modèle englobant le modèle de Kac. Ce sont ces inégalités qui vont nous être utiles dans la suite.

## 2.4 Inégalités "entropie-dissipation d'entropie" pour l'équation maîtresse

Villani a obtenu récemment ([Vi2]) de telles inégalités pour un noyau de collision ne dépendant pas de l'angle mais de l'énergie cinétique des particules qui vont interagir :

**Théorème 2.6. (Villani)** *Soit $\gamma \in [0, 2]$. On considère l'équation maîtresse de type Kac :*

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} = L_n f^{(n)} \equiv \frac{n}{C_n^2} \sum_{i<j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+(v_i^2+v_j^2)^{\gamma/2}) \left[ f^{(n)} \circ R_\theta^{ij} - f^{(n)} \right] d\theta, \ \ t \geq 0, \ v \in S^{n-1}(\sqrt{n}),$$

*où l'inconnue $f^{(n)}$ est une densité de probabilité sur la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n})$. On définit*

$$H(f^{(n)}) = \int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} f^{(n)} \log f^{(n)},$$

$$D(f^{(n)}) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} L_n(f^{(n)})(\log f^{(n)} \circ R_\theta^{ij} - \log f^{(n)}).$$

*Alors,*

$$D(f^{(n)}) \geq \frac{n^{\gamma/2}}{(\gamma+1)n - 1} H(f^{(n)}) \geq \frac{H(f^{(n)})}{(\gamma+1)n^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

*En particulier, pour $\gamma = 2$, on a*

$$D(f^{(n)}) \geq \frac{H(f^{(n)})}{3}$$

*indépendamment de $n$.*

**Remarque 2.7.** *Le modèle de Kac énoncé précédemment correspond au cas $\gamma = 0$.*

L'équation limite pour ce type de modèle est

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + (v^2 + v_*^2)^{\gamma/2}) \left[ f(t,v')f(t,v_*') - f(t,v)f(t,v_*) \right] \frac{d\theta}{2\pi}\, dv_*, \quad t \geq 0,\ v \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas $\gamma = 2$, on obtient

$$H(f_t^{(n)}) \leq H(f_0^{(n)}) e^{-t/3}.$$

On est tenté de penser que pour une suite de conditions initiales fortement chaotique (en un sens à préciser), on devrait avoir

$$H(f_0|M) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(f_0^{(n)})}{n},$$

$f_0$ étant la limite de la (première) marginale, et $H(f|M) = \int_{\mathbb{R}} f \log(f/M)$ l'entropie relative de $f$ par rapport à la Maxwellienne $M$. Dans la partie suivante, on donnera un sens précis à la notion de forte-chaoticité et on démontrera la dernière égalité. Puis on cherchera au **4** à obtenir, en suivant [CLL], une inégalité du type

$$H(f|M) \leq C \liminf_{n\to\infty} \frac{H(f^{(n)})}{n},$$

où $f^{(n)}$ est une densité symétrique sur $S^{n-1}$ et $f$ sa (première) marginale. On pourra alors en déduire que

$$H(f_t|M) \leq C H(f_0|M) e^{-t/3},$$

où $f_t$ est la solution de l'équation limite pour le modèle de type Kac dans le cas $\gamma = 2$, et conclure à la convergence $L^1$ de cette solution vers l'équilibre grâce à la remarque 2.4.

# 3 Relèvement d'une densité de $\mathbb{R}$ à $S^{n-1}$

A partir d'une densité $f$ définie sur $\mathbb{R}$, on souhaite définir une suite de densités $f^{(n)}$ sur la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n, \sum x_i^2 = n\}$ de sorte que

$$H(f|M) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(f^{(n)}).$$

Kac a admis implicitement dans [Kac] que renormaliser un produit tensoriel retreint à la sphère permettait de définir une telle suite. Cette construction est justifiée dans cette partie, mise au point avec E. Carlen, M. C. Carvalho, M. Loss et C. Villani.

## 3.1 Motivations et résultats

La question principale à laquelle nous souhaiterions pouvoir apporter une réponse est la suivante : peut-on relier, dans le cas du modèle de Kac, l'entropie macroscopique

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} f \log f,$$

où $f$ est la solution de l'équation limite avec donnée initiale $f_0$, et l'entropie microscopique

$$H(f^{(n)}) = \int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} f^{(n)} \log f^{(n)} d\sigma_n,$$

où $f^{(n)}$ est la solution de l'équation maîtresse avec donnée initiale $f_0^{(n)}$, $\sigma_n$ est la mesure uniforme sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$, et $f_0^{(n)}$ ayant pour marginale $f_0$ ?

Cette question est au centre des travaux de Kac vers une meilleure compréhension de la dérivation de l'équation de Boltzmann et du théorème $H$ à partir du modèle particulaire, et est aussi liée comme nous l'avons vu au problème de la convergence vers l'équilibre de la solution de l'équation limite.

Pour pouvoir aborder la question des temps $t > 0$, il est primordial de relier de manière satisfaisante les données initiales $f_0^{(n)}$ et $f_0$, c'est à dire définir $f_0^{(n)}$ en fonction de $f_0$ de sorte qu'il existe une relation simple entre $\frac{1}{n}H(f_0^{(n)})$ et $H(f_0)$. Quand il n'y a pas de loi de conservation (et que l'on travaille donc sur $\mathbb{R}^n$), le problème est trivial : il suffit de poser $f_0^{(n)} = f_0^{\otimes n}$ dans $\mathbb{R}^n$ (avec $f^{\otimes n}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$), et on a alors

$$\frac{1}{n}H(f_0^{(n)}) = H(f_0).$$

Ce que Kac admet implicitement dans [Kac] est que l'on peut faire de même asymptotiquement lorsque l'on est contraint par la loi de conservation $\sum v_i^2 = cste$. On souhaiterait donc pouvoir relever une densité $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ en une suite de densités $f_0^{(n)}$ sur la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n})$, de sorte que

$$H(f_0|M) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{n} H(f_0^{(n)}). \tag{3}$$

On peut alors se demander si cette propriété est préservée par le flot de $f_0^{(n)}$ selon l'équation maîtresse et de $f_0$ selon l'équation de Kac-Boltzmann.

L'égalité (3) est admise dans une remarque de [Vi2], on va ici la démontrer sous l'hypothèse $f_0 \in L^\infty \cap L^1_6(\mathbb{R})$, où $f \in L^1_6(\mathbb{R})$ signifie $\int f(x)(1+x^2)^3 dx < +\infty$ :

**Théorème 3.1.** *Soit $f \in L^\infty \cap L^1_6(\mathbb{R})$ telle que $\int f = \int f x^2 = 1$, on pose*

$$f^{(n)} = \frac{f^{\otimes n} 1_{\sum x_i^2 = n}}{\int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} f^{\otimes n} d\sigma_n}.$$

*Alors*

$$\frac{1}{n} H(f^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(f|M).$$

La démonstration de ce théorème sera aussi l'occasion de simplifier ou corriger certaines asymptotiques de [Kac].

Le théorème 3.1 semble en contradiction avec les résultats de [CLL] qui indiquent que la constante 2 est optimale dans l'inégalité

$$nH(f_1^{(n)}) \leq 2H(f^{(n)}),$$

où $f^{(n)}$ varie parmi l'ensemble des distributions de probabilité symétriques sur $S^{n-1}$, et $f_1^{(n)}$ est la (première) marginale de $f^{(n)}$, i.e. l'unique fonction mesurable sur $[-1, 1]$ telle que, pour toute fonction mesurable $\Phi : x \mapsto \phi(x_1)$ définie sur $S^{n-1}$ ne dépendant que de la première coordonnée $x_1$, on a l'égalité

$$\int_{S^{n-1}} f^{(n)}(x)\Phi(x)d\sigma_n(x) = \int_{S^{n-1}} f_1^{(n)}(x_1)\phi(x_1)d\sigma_n(x).$$

On remarque en effet qu'un résultat dû à Maxwell, connu sous le nom de Lemme de Poincaré et démontré au **3.2.1** ci-dessous, nous dit que la projection sur $\mathbb{R}$ de la mesure uniforme sur la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n})$ tend vers la mesure gaussienne $\gamma = M(x)dx$. On peut donc espérer que $(f/M)^{\otimes n} d\sigma_n$ va se comporter asymptotiquement "comme $f^{\otimes n}$". Si $f^{(n)}$ est choisie comme dans le théorème 3.1, on verra que $f_1^{(n)}$ va être proche de $f/M$. On peut ainsi penser que $H(f_1^{(n)})$ va tendre vers $H(f|M)$ quand $n$ tendra vers l'infini.

Toutefois, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}^n$, il n'est pas clair que les distributions minimisant l'entropie proviennent d'un produit tensoriel, comme c'est le cas dans le théorème 3.1. D'autre part, si l'on peut éventuellement trouver à $n_0$ fixé une densité $f_0$ telle que $(1/n_0)H(f_0^{(n_0)})$ soit "beaucoup plus" petit que $H(f_0|M)$, cela n'empêchera pas que, pour $n \to +\infty$, $(1/n_0)H(f_0^{(n_0)})$ converge vers $H(f_0|M)$.

L'outil-clé dans la démonstration du théorème 3.1 est le Théorème Central Limite Local (ou TCLL), tel que l'on peut le trouver dans [Fel]. Ceci n'est pas très surprenant car il s'agit d'une version "locale" du TCL, or c'est la Loi des Grands Nombres (et a fortiori le TCL) qui suggère que la masse de $f^{\otimes n}$ se concentre autour de la sphère $\frac{1}{n}\sum x_i^2 = 1$ quand $n \to +\infty$.

## 3.2 Résultats préliminaires

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int fx^2 = \int f$, on considèrera dans la suite la mesure de probabilité sur $S^{n-1}$

$$\frac{f^{\otimes n} 1_{\sum x_i^2 = n}}{\int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} f^{\otimes n} d\sigma_n},$$

que l'on notera encore $f^{\otimes n}$ par abus de notations. Cette définition a un sens à partir d'un certain rang, par propriété régularisante de la convolution.

### 3.2.1 Lemme de Poincaré

Nous énonçons et démontrons ici en suivant [Szn] le lemme de Poincaré, résultat de chaoticité sur la mesure uniforme sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$ :

**Lemme 3.2.** *La mesure uniforme $d\sigma_n(x)$ sur la sphère $S^{n-1}(\sqrt{n})$ de rayon $\sqrt{n}$ dans $\mathbb{R}^n$ est $\gamma$-chaotique, où $\gamma = M(x)dx$.*

**Démonstration** : $\sigma_n$ est clairement symétrique. Nous allons montrer directement que la projection de $\sigma_n$ sur les $k$ premières composantes de $\mathbb{R}^n$ converge faiblement vers $\gamma^{\otimes k}$.

On note $\mu_n(dr)$ la loi de $\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$ sous $\gamma^{\otimes n}$, et $\sigma_{n,r}(dx)$ la mesure uniforme sur la sphère de rayon $r$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $f$ continue à support compact sur $\mathbb{R}^k$. D'après la Loi des Grands Nombres appliquée à $(X_1^2 + \cdots + X_n^2)/n$ sous $\gamma^{\otimes n}$, pour $0 < a < 1 < b$, on a

$$\mathbb{P}_{\gamma^{\otimes n}} \left( \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \notin [a, b] \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est à dire

$$\mu_n \left( [a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]^c \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\, \gamma^{\otimes k}(dx) - \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} d\mu_n(r) \int d\sigma_{n,r}(x) f(x_1, \ldots, x_k) = \int_{[a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]^c} d\mu_n(r) \int d\sigma_{n,r}(x) f(x_1, \ldots, x_k).$$

$\int d\sigma_{n,r}(x) f(x_1, \ldots, x_k)$ étant borné, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^k} f(x) \gamma^{\otimes k}(dx) - \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} d\mu_n(r) \int d\sigma_{n,r}(x) f(x_1, \ldots, x_k) \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

On remarque d'autre part que

$$\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} d\mu_n(r) \int d\sigma_{n,r}(x) f(x_1, \ldots, x_k) = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} d\mu_n(r) \int d\sigma_n(x) f\left( x_1 \frac{r}{\sqrt{n}}, \ldots, x_k \frac{r}{\sqrt{n}} \right).$$

Dans cette dernière intégrale, $r\sqrt{n} \in [a, b]$, et $f$ étant continue à support compact, on en déduit que

$$\lim_{a,b\to 1} \sup_{n \geq k} \left| \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} d\mu_n(r) \int d\sigma_{n,r}(x) f - \mu_n \left( [a\sqrt{n}, b\sqrt{n}] \right) \langle \sigma_n, f \otimes 1 \cdots \otimes 1 \rangle \right| = 0. \tag{5}$$

Pour chaque $a < 1 < b$, $\mu_n \left( [a\sqrt{n}, b\sqrt{n}] \right) \to 1$ quand $n$ tend vers l'infini. On en conclut grâce à (4) et (5) que $\langle \sigma_n, f \otimes 1 \cdots \otimes 1 \rangle$ tend vers $\langle \gamma^{\otimes k}, f \rangle$ quand $n$ tend vers l'infini. □

Dans la définition de la chaoticité d'une suite de probabilités donnée au **1.5**, les fonctions test sont continues bornées. On ne considère dans la preuve du lemme précédent que des fonctions continues à support compact, mais le lemme suivant (admis ici) nous permet d'étendre la propriété aux fonctions continues bornées :

**Lemme 3.3.** *Soient $(\mu_n)$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^k$ et $\mu$ une mesure de probabilité, telles que pour tout $\phi \in C_c$,*

$$\int \phi \, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \phi \, \mu.$$

*Alors, pour tout $\phi \in C_b$,*

$$\int \phi \, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \phi \, \mu.$$

### 3.2.2 Passage de $f$ à $f/M$

Comme on l'a évoqué dans les commentaires suivant le théorème 3.1, le lemme de Poincaré nous pousse à considérer $f/M$ plutôt que $f$, ce changement n'ayant pas d'incidence au niveau de la densité de probabilité relevée à la sphère : en effet, si l'on pose $g = f/M$, alors

$$\frac{f^{\otimes n} 1_{\sum x_i^2 = n}}{\int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} f^{\otimes n} d\sigma_n} = \frac{g^{\otimes n} 1_{\sum x_i^2 = n}}{\int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} g^{\otimes n} d\sigma_n}$$

car $M(x_1) \cdots M(x_n)$ est constante sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$. Cette égalité s'écrit aussi

$$\frac{f(x_1) \cdots f(x_n)}{Z_n(\sqrt{n})} = \frac{g(x_1) \cdots g(x_n)}{Z_n'(\sqrt{n})},$$

où

$$Z_n(\sqrt{u}) := \int_{S^{n-1}(\sqrt{u})} f(x_1) \cdots f(x_n) d\sigma_{n,u}(x)$$

et

$$Z_n'(\sqrt{u}) := \int_{S^{n-1}(\sqrt{u})} g(x_1) \cdots g(x_n) d\sigma_{n,u}(x),$$

$\sigma_{n,u}$ étant la probabilité uniforme sur $S^{n-1}(\sqrt{u})$.

Sur $S^{n-1}(\sqrt{u})$,

$$M(x_1) \cdots M(x_n) = \frac{e^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(2\pi)^{n/2}},$$

donc

$$Z_n'(\sqrt{u}) = e^{\frac{u}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} Z_n(\sqrt{u}).$$

### 3.2.3 Interprétation de $Z_n$ en termes de la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ sous $(f\,dx)^{\otimes n}$

Un développement asymptotique de $Z_n(\sqrt{u})$ nous sera utile dans la suite. On relie cette quantité à la densité de la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ sous la loi $(f\,dx)^{\otimes n}$ grâce au lemme suivant :

**Lemme 3.4.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes de même loi $f\,dx$. Alors la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ a pour densité*

$$h_n(u) = \frac{|S^{n-1}|}{2} u^{\frac{n}{2}-1} Z_n(\sqrt{u}) 1_{u>0},$$

*où $|S^{n-1}|$ désigne le volume de la sphère $S^{n-1}$.*

**Démonstration** : On note $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ et $\sigma$ la probabilité uniforme sur la sphère $S^{n-1}$. Pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\varphi(X_1^2 + \cdots + X_n^2) &= \int_{\mathbb{R}^n} f^{\otimes n} \varphi(r^2) dx_1 \dots dx_n \\
&= |S^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}} f^{\otimes n} r^{n-1} \varphi(r^2) dr d\sigma \\
&= |S^{n-1}| \int_0^{+\infty} \varphi(u) \left( \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{2\sqrt{u}} \int_{S^{n-1}} f(\sqrt{u} y_1) \cdots f(\sqrt{u} y_n) d\sigma(y) \right) du \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(u) \left( \frac{|S^{n-1}|}{2} u^{\frac{n}{2}-1} Z_n(\sqrt{u}) \right) du.
\end{aligned}$$

□

Nous utiliserons également deux relations bien connues : le volume de la sphère $S^{n-1}$ tout d'abord,

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{6}$$

On notera dans la suite

$$\alpha_n(u) = u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}},$$

et on utilisera pour $\Gamma$ le développement suivant, conséquence de la formule de Stirling :

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi n}\, \alpha_n(n) 2^{-\frac{n}{2}+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{7}$$

### 3.2.4 Théorème Central Limite Local

Pour évaluer des asymptotiques de $h_n$, on utilisera de manière répétée le **Théorème Central Limite Local** ([Fel]) :

**Théorème 3.5.** *Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une famille de v.a. indépendantes de loi $\mu$ sur $\mathbb{R}$ de densité $h$. On note $\sigma^2 = Var(Y)$. Si $\mu$ a un moment d'ordre 3 fini $\mu_3$, et si $\hat{\mu} \in L^q$ pour un certain $q < +\infty$, alors*

- *la densité $\Psi_n$ de la loi de $\frac{Y_1 + \cdots + Y_n - n\mathbb{E}Y}{\sqrt{n\sigma^2}}$ existe pour $n \geq q$,*
- *et on a*
$$\Psi_n(x) - M(x) - \frac{\mu_3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} (x^3 - 3x) M(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
*uniformément en $x \in \mathbb{R}$.*

## 3.3 Evaluation de $Z_n(\sqrt{u})$

Soient $p \in (1, +\infty]$ et $f \in L^p \cap L^1_6(\mathbb{R})$ telle que $\int f = \int f x^2 = 1$.
D'après le lemme 3.4, si la loi de $X$ a pour densité $f$, la loi de $X^2$ a pour densité

$$h(u) = \frac{|S^0|}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \left( \frac{f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \left( f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u}) \right).$$

Or $f \in L^1 \cap L^p$, donc $h \in L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in [1, 2p/(p+1)[$, et par Hausdorff-Young $\hat{h} \in L^r(\mathbb{R})$ pour tout $r \in ](p-1)/(2p), +\infty]$. De plus $\mathbb{E}(X^2)^3 = \mathbb{E}X^6 < +\infty$, donc le moment d'ordre 3 de $h$ est fini. On peut donc appliquer le **Théorème Central Limite Local** avec $Y = X^2$. Pour $u > 0$, en utilisant la relation

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \Psi_n \left( \frac{u-n}{\sqrt{n\sigma^2}} \right),$$

on obtient

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left[ M \left( \frac{u-n}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

Grâce au développement asymptotique de $\Gamma$ donné par la formule (7), on montre le

**Lemme 3.6.**

$$Z_n'(\sqrt{u}) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\alpha_n(n)}{\alpha_n(u)}} \left( e^{-\frac{(u-n)^2}{2n\sigma^2}} + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \tag{8}$$

*et en particulier*

$$Z_n'(\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right). \tag{9}$$

**Remarque 3.7.** *Dans la suite, on utilisera toujours $\sigma^2 = 1$, on a alors*

$$Z_n'(\sqrt{n}) = \sqrt{2} + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \tag{10}$$

La formule (7) nous donne aussi le développement asymptotique suivant, qui nous sera aussi utile par la suite :

$$\frac{|S^{n-1}|}{|S^n|} = \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

## 3.4 Semi-continuité inférieure asymptotique de l'entropie

**Théorème 3.8.** *Soit $f^{(n)}$ une famille de densités de probabilité symétriques sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$. On suppose que $f^{(n)}$ est $f$-chaotique, avec $f$ vérifiant $\int f(x) x^2 dx = 1$.*
*Alors*

$$H(f|M) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(f^{(n)}).$$

On note comme précédemment $d\gamma(x) = M(x)\,dx$ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$. Le lemme suivant est un cas particulier d'une formulation variationnelle générale de l'entropie relative démontrée dans [DoVa].

**Lemme 3.9.** *Soit $f$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$H(f|M) = \sup_{\varphi \in C_b(\mathbb{R})} \left[ \int f\varphi - \log \int e^{\varphi} d\gamma \right].$$

**Démonstration** : On notera

$$I(f|M) = \sup_{\varphi \in C_b(\mathbb{R})} \left[ \int f\varphi - \log \int e^{\varphi} d\gamma \right].$$

Par concavité du log, on a pour tous $a, b > 0$,

$$ab \leq a \log a - a + e^b,$$

ou encore

$$ab = a(b-c) + ac \leq a \log a - a + ac + e^{b-c}.$$

En intégrant par rapport à $\gamma$ cette dernière inégalité avec $a = f/M$, $b = \varphi$ et $c = \log \int e^{\varphi} d\gamma$, on obtient

$$\int f\varphi \leq H(f|M) + \log \int e^{\varphi} d\gamma.$$

Reste donc à montrer que

$$H(f|M) \leq I(f|M).$$

Pour toute $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\int f\varphi - \log \int e^{\varphi} d\gamma \leq I(f|M). \tag{11}$$

L'ensemble des fonctions pour lesquelles (11) est vérifiée étant fermé pour la convergence presque partout et bornée, on déduit du théorème de Lusin que l'inégalité (11) est encore vraie pour toute $\varphi$ mesurable borné. On pose

$$\varphi_n(x) = \log \left( \left( \frac{f(x)}{M(x)} \vee \frac{1}{n} \right) \wedge n \right) \in C_b(\mathbb{R}),$$

et on a

$$\forall n, \quad \int f\varphi_n - \log \int e^{\varphi_n} d\gamma \leq I(f|M). \tag{12}$$

En appliquant le théorème de Lebesgue sur $\{f \leq M\}$ et le théorème de convergence monotone sur $\{f > M\}$, on voit que

$$\int \left| e^{\varphi_n} - \frac{f}{M} \right| d\gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $\varphi_n^+ \nearrow (\log(f/M))^+$ et $\varphi_n^- \nearrow (\log(f/M))^-$, et $\int f \log(f/M)$ étant finie, on en déduit par convergence monotone que

$$\int f\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \log \frac{f}{M}.$$

On passe ainsi à la limite dans (12), ce qui termine la preuve du lemme. □

**Lemme 3.10.** *Soit $f$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Si $\int f = \int f(x)x^2\,dx = 1$, alors*

$$H(f|M) = \sup\left\{\int f\varphi\ ;\ \varphi\in C_b(\mathbb{R}),\ \int e^{\varphi}d\gamma = 1,\ \int e^{\varphi(x)}x^2d\gamma(x) = 1\right\}$$

**Démonstration du Théorème 3.8** : Soit $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$. Alors

$$\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)\in C_b(S^{n-1}(\sqrt{n})),$$

et

$$\int f^{(n)}[\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)]\,d\sigma_n - \log\int e^{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}\,d\sigma_n \le H(f^{(n)}), \tag{13}$$

par le même type de raisonnement qu'au lemme 3.9. Par symétrie, on a

$$\frac{1}{n}\int f^{(n)}[\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)]\,d\sigma_n = \int f_1^{(n)}\varphi,$$

où $f_1^{(n)}$ est la première marginale de $f^{(n)}$. Grâce au lemme 3.3, on étend la propriété de $f$-chaoticité de $f^{(n)}$ à des fonctions test dans $C_b(\mathbb{R})$. On en déduit que

$$\frac{1}{n}\int f^{(n)}[\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)]\,d\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\phi.$$

On suppose maintenant

$$\int e^{\varphi}d\gamma = \int e^{\varphi(x)}x^2\,d\gamma = 1.$$

On écrit

$$\int e^{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}\,d\sigma_n = \int h^{\otimes n}d\sigma_n,$$

où $h(x) = e^{\varphi(x)}$. On a $\int hM\,dx = \int hd\gamma = 1$ et $\int h(x)M(x)x^2\,dx = \int h(x)x^2\,d\gamma(x) = 1$. On voit ainsi que $\int h^{\otimes n}d\sigma_n$ est le $Z_n'(\sqrt{n})$ associé à la fonction $hM$. D'où

$$\int e^{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}\,d\sigma_n = \sqrt{2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et donc

$$\frac{1}{n}\log\int e^{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}\,d\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{n}\left\{\int f^{(n)}[\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)]\,d\sigma_n - \log\int e^{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}\,d\sigma_n\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\,\varphi,$$

et on en déduit grâce à (13) que

$$\int f\varphi \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(f^{(n)}),$$

et ce pour toute fonction $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ vérifiant les contraintes $\int e^{\varphi} d\gamma = \int e^{\varphi(x)} x^2 \, d\gamma = 1$. A l'aide du lemme 3.10, on obtient finalement que

$$H(f|M) \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(f^{(n)}).$$

□

### 3.5 $f$-chaoticité de $f^{\otimes n}$

Dans le théorème démontré à la section précédente, on suppose que la suite de probabilités symétriques $f_n$ est $f$-chaotique. On montre dans le théorème suivant que la suite $f^{\otimes n}$ vérifie cette hypothèse, sous certaines conditions d'intégrabilité.

**Théorème 3.11.** *Soit $f$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $p \in (1, +\infty]$ tel que $f \in L^p \cap L^1_6(\mathbb{R})$ et $\int f = \int f x^2 = 1$. Alors $f^{\otimes n}$ est $f$-chaotique. Mieux, si l'on note $\pi_k \sharp f^{\otimes n}$ sa projection sur les $k$ premières coordonnées de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $\phi$ mesurable bornée sur $\mathbb{R}^k$,*

$$\int \phi(x_1, \ldots, x_k) \, \pi_k \sharp f^{\otimes n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^k} \phi \, f^{\otimes k}.$$

*Autrement dit, $\pi_k \sharp f^{\otimes n}$ converge vers $f^{\otimes k}$ dans $L^1$.*

**Démonstration** : On note $|S^{n-1}(\sqrt{u})|$ le volume de la sphère $S^{n-1}(\sqrt{u})$, et $g = f/M$. Soit $\phi$ mesurable bornée sur $\mathbb{R}^k$.

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}(\sqrt{n})} \frac{\phi(x_1, \ldots, x_k) g^{\otimes n}}{Z_n'(\sqrt{n})} \, d\sigma_n \\
&= \int_{x_1^2+\cdots+x_k^2 \leq n} dx_1 \cdots dx_k \, \phi(x_1, \ldots, x_k) g(x_1) \cdots g(x_k) \frac{\left|S^{n-k-1}\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)\right|}{|S^{n-1}(\sqrt{n})| \, Z_n'(\sqrt{n})} \\
&\qquad \int_{S^{n-k-1}\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)} g(x_{k+1}) \cdots g(x_n) \, d\sigma_{n-k, \sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}} \\
&= \int_{x_1^2+\cdots+x_k^2 \leq n} dx_1 \cdots dx_k \, \phi(x_1, \ldots, x_k) g(x_1) \cdots g(x_k) \\
&\qquad \frac{\left|S^{n-k-1}\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)\right|}{|S^{n-1}(\sqrt{n})|} \frac{Z_{n-k}'\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)}{Z_n'(\sqrt{n})}.
\end{aligned}$$

D'après les calculs effectués au **3.3**, on a

$$\frac{Z'_{n-k}\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)}{Z'_n(\sqrt{n})}\frac{\left|S^{n-k-1}\left(\sqrt{n-(x_1^2+\cdots+x_k^2)}\right)\right|}{|S^{n-1}(\sqrt{n})|}$$

$$=\frac{\left(n-\left(x_1^2+\cdots+x_k^2\right)\right)^{\frac{n-k-1}{2}}}{\alpha_{n-k}\left(n-\left(x_1^2+\cdots+x_k^2\right)\right)}\frac{\alpha_{n-k}(n-k)}{n^{(n-1)/2}}\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{k}{2}}\left(e^{-\frac{\left(1-x_1^2\right)^2}{2n\sigma^2}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_k^2}{2}}\left(1-\frac{x_1^2+\cdots+x_k^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{\left(k-\left(x_1^2+\cdots+x_k^2\right)\right)^2}{2(n-k)\sigma^2}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Or $e^{-\frac{\left(k-\left(x_1^2+\cdots+x_k^2\right)\right)^2}{2(n-k)\sigma^2}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1+O\left(\frac{\left(x_1^2+\cdots+x_k^2\right)^2}{n}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Les estimations obtenues ci-dessus grâce au **TCLL** nous permettent donc de conclure pour $x_1^2+\cdots+x_k^2=o\left(n^{1/2}\right)$. D'autre part en moyenne $x_1^2+\cdots+x_k^2=O(1)$, on espère donc que la contribution de $x_1^2+\cdots+x_k^2>>n^{1/2}$ comptera peu. Plus précisément, on a tout d'abord :

$$\int_{x_1^2+\cdots+x_k^2\leq\varepsilon n^{1/2}}\frac{\phi(x_1,\ldots,x_k)g^{\otimes n}}{Z'_n(\sqrt{n})}\,d\sigma_n$$

$$=\int_{x_1^2+\cdots+x_k^2\leq\varepsilon n^{1/2}}\phi\; g(x_1)\cdots g(x_k)M(x_1)\cdots M(x_k)\,dx_1\cdots dx_k\left(1+O\left(\varepsilon^2\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^k}\phi\,f^{\otimes k}\;\left(1+O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Il nous reste donc à montrer que la partie restante tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. La fonction test $\phi$ étant bornée, il suffit de voir que c'est le cas pour

$$\int_{x_1^2+\cdots+x_k^2>\varepsilon\, n^{1/2}}\frac{g^{\otimes n}}{Z'_n(\sqrt{n})}\,d\sigma_n.$$

Or cette quantité n'est autre que

$$\mathbb{P}\left[X_1^2+\cdots+X_k^2>\varepsilon\, n^{1/2}\right],$$

que l'on peut majorer grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff par

$$\frac{1}{\varepsilon\, n^{1/2}}\mathbb{E}\left[X_1^2+\cdots+X_k^2\right]=\frac{1}{\varepsilon\, n^{1/2}}\left(\frac{k}{n}\mathbb{E}\left[X_1^2+\cdots+X_n^2\right]\right)=\frac{k}{\varepsilon\, n^{1/2}}$$

par symétrie, et cette dernière quantité tend bien vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. $\square$

## 3.6 $f^{\otimes n}$ est fortement chaotique

**Définition 3.12.** *Soit $f^{(n)}$ une famille de densités de probabilité symétriques sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$. $f^{(n)}$ est dite* **fortement chaotique** *s'il existe $f$ densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, $\int f(x)x^2dx = 1$, telle que*

- *$f^{(n)}$ est $f$-chaotique, les fonctions tests pouvant être choisies mesurables bornées,*
- $\displaystyle \frac{1}{n}H\left(f^{(n)} \middle| \frac{f^{\otimes n}\sigma_n}{Z_n(\sqrt{n})}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *ce que l'on notera encore* $\displaystyle \frac{1}{n}H\left(f^{(n)} \middle| f^{\otimes n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

*On dira aussi que $f^{(n)}$ est fortement $f$-chaotique.*

**Remarque 3.13.** *Il est clair que, sous les hypothèses du théorème 3.11, $f^{\otimes n}$ est fortement $f$-chaotique.*

Le théorème suivant, associé à la remarque 3.13, termine la preuve du théorème 3.1 :

**Théorème 3.14.** *Si $f^{(n)}$ est fortement $f$-chaotique avec $f \in L^\infty \cap L^1_6(\mathbb{R})$, alors*

$$\frac{1}{n}H(f^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(f|M).$$

**Démonstration** : On sait que $H(f|M) \leq \underline{\lim}\, \frac{1}{n}H(f^{(n)})$, donc il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}H(f^{(n)}) \leq H(f|M).$$

Par définition, on a

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n}H(f^{(n)}) = \overline{\lim}\, \frac{1}{n}\int f^{(n)} \log f^{(n)}.$$

Par hypothèse de forte $f$-chaoticité, on a

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n}\int f^{(n)} \log f^{(n)} = \overline{\lim}\, \frac{1}{n}\int f^{(n)} \log\left(\frac{g^{\otimes n}}{Z'_n}\right),$$

donc par symétrie

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n}H(f^{(n)}) = \overline{\lim}\, \int f^{(n)} \log g(x_1) d\sigma_n + \overline{\lim}\, \frac{1}{n}\int f^{(n)} \log\left(\frac{1}{Z'_n}\right). \tag{14}$$

Le deuxième terme du membre de droite de (14) tend vers 0 car $Z'_n$ tend vers $\sqrt{2}$.

Regardons le premier terme : on écrit $g = f/M$, et on note que

$$\int f^{(n)}(x)x_1^2 d\sigma_n = \frac{1}{n}\int f^{(n)}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)d\sigma_n = 1$$

$$\text{et} \qquad \int f^{(n)} \log\sqrt{2\pi}d\sigma_n = \log\sqrt{2\pi}.$$

On a donc

$$\int f^{(n)} \log\frac{1}{M}d\sigma_n = \int f \log\frac{1}{M}d\sigma_n,$$

et il suffit ainsi de montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int f^{(n)} \log f(x_1) d\sigma_n \leq \int f \log f. \tag{15}$$

Pour démontrer (15), on écrit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int f^{(n)} \log f(x_1) d\sigma_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int f^{(n)} \log \left(\varepsilon + f(x_1)\right) d\sigma_n.$$

La fonction $\log(\varepsilon + f(x_1))$ étant mesurable bornée, on en déduit par $f$-chaoticité que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int f^{(n)} \log \left(\varepsilon + f(x_1)\right) d\sigma_n = \int f(x_1) \log \left(\varepsilon + f(x_1)\right) dx_1.$$

On passe enfin à la limite quand $\varepsilon$ tend vers 0 pour obtenir (15). □

# 4 Inégalité entropique sur la sphère $S^{n-1}$

On peut maintenant tenter de montrer une inégalité sur l'entropie relative de la marginale au temps $t$,

$$H(f_t|M) \leq C \lim_{n\to\infty} \frac{H(f_t^{(n)})}{n}.$$

Comme on l'a remarqué au **3.1**, cette inégalité sur l'entropie relative semble pouvoir découler grâce au lemme de Poincaré (cf. **3.2.1**) d'un résultat dû à Carlen, Lieb et Loss ([CLL]) :

$$\sum_{j=1}^{n} \int f_j^{(n)} \log f_j^{(n)} d\sigma_n \leq 2 \int f^{(n)} \log f^{(n)} d\sigma_n,$$

où les $f_j^{(n)}$ sont les marginales de $f^{(n)}$, densité de probabilité sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$. Par symétrie dans notre cas on en déduit

$$\int f_1^{(n)} \log f_1^{(n)} d\sigma_n \leq \frac{2}{n} \int f^{(n)} \log f^{(n)} d\sigma_n.$$

L'idée pour conclure est, comme on l'a vu au **3.1**, que d'après le lemme de Poincaré la projection sur une coordonnée de la mesure uniforme sur $S^{n-1}(\sqrt{n})$ tend vers la mesure gaussienne. Il suffirait donc d'avoir convergence de la marginale au temps $t$ du système vers $f_t$ pour conclure par le théorème de Lebesgue.

On donne ici l'analogue de l'inégalité de Young sur $S^{n-1}$ démontré dans [CLL] et le résultat cité ci-dessus qui en est le corollaire, ainsi que les idées-clé de leur démonstration.

**Théorème 4.1. (Carlen-Lieb-Loss)** *Pour tout* $n \geq 2$, *si* $f_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *sont des fonctions mesurables positives sur* $[-1, 1]$, *alors*

$$\int_{S^{n-1}} \left( \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \right) d\sigma_n \leq \prod_{j=1}^{n} ||f_j||_{L^2(S^{n-1})}. \tag{16}$$

**Remarque 4.2.** *L'inégalité de Young classique dans $\mathbb{R}^n$ nous donne en particulier, pour des fonctions mesurables positives $f_j$, $j = 1, 2, \dots, p$, la relation suivante :*

$$||f_1 * \cdots * f_p||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||f_1||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdots ||f_p||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

*Or, sur la sphère, l'inégalité fait intervenir dans le membre de droite les normes $L^2$ des fonctions, et il est démontré dans [CLL] que ceci est optimal. Il y a donc une perte due au fait que l'on travaille sur la sphère.*

**Démonstration** : L'idée de la démonstration est d'utiliser le semi-groupe de la chaleur sur la sphère, en réécrivant l'inégalité à démontrer sous la forme

$$\int_{S^{n-1}} \left( \prod_{j=1}^{n} \sqrt{g_j(x_j)} \right) d\sigma_n \leq \prod_{j=1}^{n} ||g_j||_{L^1(S^{n-1})}^{1/2}.$$

On considère l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_S$ sur $S^{n-1}$ qui peut être défini par

$$\Delta_S = \sum_{i<j} L_{i,j}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} L_{i,j}^2,$$

où

$$L_{i,j} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \, i \neq j.$$

On peut alors écrire, pour $f$ et $g$ régulière,

$$\nabla f \cdot \nabla g = \sum_{i<j} L_{i,j} f L_{i,j} g = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} L_{i,j} f L_{i,j} g,$$

et $|\nabla f|^2 = \nabla f \cdot \nabla f$, $\nabla f$ désignant le gradient tangentiel sur $S^{n-1}$.

Pour toute fonction positive $g$ dans $L^1(S^{n-1})$ et pour tout $t > 0$, on définit

$$g(x,t) = e^{t\Delta} g(x).$$

Les propriétés régularisantes du semi-groupe de la chaleur font que $g(\cdot, t)$ est régulière pour tout $t > 0$. De plus, la norme $L^1(S^{n-1})$ de $g$ est conservée au cours de cette évolution :

$$||g(\cdot, t)||_{L^1(S^{n-1})} = ||g||_{L^1(S^{n-1})},$$

pour tout $t > 0$. On remarque par ailleurs que si $g$ ne dépend que de $x_j$ pour un certain $j$, il en est de même pour $g(\cdot, t)$. En effet, $g$ ne dépend que de $x_j$ si et seulement si $g$ est invariant par toutes les rotations qui fixent l'axe des $x_j$, et ces rotations commutent avec le laplacien. On écrira dans ce cas $g(x_j, t)$. D'autre part, l'évolution a évidemment la propriété de semi-groupe : pour tout $s, t > 0$,

$$g(x, s+t) = e^{s\Delta} g(x,t).$$

On observe aussi que

$$\lim_{t \to \infty} g(x,t) = ||g||_{L^1(S^{n-1})},$$

uniformément en $x$.

Enfin, on montre par un calcul direct que pour toute fonction $g$ régulière positive sur $S^{n-1}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\Delta g}{2\sqrt{g}}.$$

Soient maintenant $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions mesurables positives sur $[-1,1]$ telles que $x \mapsto g_j(x_j)$ soit dans $L^2(S^{n-1})$. Pour démontrer le théorème 4.1, il suffit d'après ce qui précède de montrer que

$$\int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \sqrt{g_j(x_j,t)}\, d\sigma_n$$

est une fonction croissante de $t$. Grâce à la propriété de semi-groupe, aux propriétés régularisantes et à la stricte positivité de l'équation de la chaleur, on peut supposer que les fonctions $x_j \mapsto g_j(x_j)$ sont régulières strictement positives sur $[-1,1]$, et il suffit alors de vérifier que

$$\frac{d}{dt}\left( \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \sqrt{g_j(x_j,t)}\, d\sigma_n \right)\Big|_{t=0} \geq 0.$$

Or,

$$\frac{d}{dt}\left( \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \sqrt{g_j(x_j,t)}\, d\sigma_n \right)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} \frac{\Delta g_k}{2\sqrt{g_k}} \prod_{l=1, l\neq k}^{n} \sqrt{g_l}\, d\sigma_n.$$

On réécrit le terme de droite comme suit, en remarquant que $L_{i,j} g_k = 0$ sauf si $i = k$ ou $j = k$ :

$$\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i<k} L_{i,k}^2 g_k \right) \frac{1}{\sqrt{g_k}} \prod_{l=1, l\neq k}^{n} \sqrt{g_l}\, d\sigma_n + \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j>k} L_{k,j}^2 g_k \right) \frac{1}{\sqrt{g_k}} \prod_{l=1, l\neq k}^{n} \sqrt{g_l}\, d\sigma_n. \tag{17}$$

Etudions le premier terme de (17) en intègrant par parties :

$$\int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i<k} L_{i,k}^2 g_k \right) \frac{1}{\sqrt{g_k}} \prod_{l=1, l\neq k}^{n} \sqrt{g_l}\, d\sigma_n = -\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i<k} L_{i,k} g_k L_{i,k}\sqrt{\frac{g_i}{g_k}} \right) \prod_{l=1, l\neq i,k}^{n} g_l\, d\sigma_n. \tag{18}$$

Un simple calcul nous donne

$$L_{i,k}\sqrt{\frac{g_i}{g_k}} = -\frac{1}{2} x_i \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \frac{\sqrt{g_i}\sqrt{g_k}}{g_k^2} - \frac{1}{2} x_k \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{g_i}\sqrt{g_k}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{g_i}\sqrt{g_k}}{g_k^2} L_{i,k} g_k + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_i}\sqrt{g_k}} L_{i,k} g_i,$$

On introduit les fonctions régulières $h_k$ et $G$ définies par

$$h_k = \log g_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad G = \prod_{j=1}^{n} g_j,$$

on a alors

$$L_{i,k} g_k L_{i,k}\sqrt{\frac{g_i}{g_k}} = \frac{1}{2}\sqrt{g_i}\sqrt{g_k}\left( -(L_{i,k}h_k)^2 + L_{i,k}h_i L_{i,k}h_k \right),$$

et le membre de droite de (18) s'écrit

$$\frac{1}{4}\int_{S^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i<k}\left((L_{i,k}h_k)^2-L_{i,k}h_kL_{i,k}h_i\right)\sqrt{G}d\sigma_n.$$

On fait les mêmes manipulations sur les termes restants de (17), et on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\int_{S^{n-1}}\frac{\Delta g_k}{2\sqrt{g_k}}\prod_{l=1,l\neq k}^{n}\sqrt{g_l}d\sigma_n &= \frac{1}{4}\int_{S^{n-1}}\sum_{i\neq k}\left((L_{i,k}h_k)^2-L_{i,k}h_kL_{i,k}h_i\right)\sqrt{G}d\sigma_n \\
&= \frac{1}{4}\int_{S^{n-1}}\sum_{i\neq k}\left(\frac{1}{2}(L_{i,k}h_k)^2+\frac{1}{2}(L_{i,k}h_i)^2-L_{i,k}h_kL_{i,k}h_i\right)\sqrt{G}d\sigma_n \\
&= \frac{1}{8}\int_{S^{n-1}}\sum_{i\neq k}\left(L_{i,k}h_k-L_{i,k}h_i\right)^2\sqrt{G}d\sigma_n,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du théorème 4.1. □

On en déduit l'inégalité évoquée précédemment :

**Corollaire 4.3. (Carlen-Lieb-Loss)** *Pour tout $n\geq 2$, si $F$ est une densité de probabilité sur $S^{n-1}$ et si l'on note $f_j$ la $j$-ème marginale de $F$ pour $j=1,2,\dots,n$, alors*

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}}f_j\log f_jd\sigma_n\leq 2\int_{S^{n-1}}F\log Fd\sigma_n.$$

**Démonstration** : Soient comme introduits dans l'énoncé $F$ une densité de probabilité sur $S^{n-1}$, $n\geq 2$, et $f_j$, $j=1,2,\dots,n$ ses marginales. $f_j$ étant une densité de probabilité, $||f_j^{1/2}||_{L^2(S^{n-1})}=1$. On note

$$C=\int_{S^{n-1}}\left(\prod_{j=1}^{n}f_j^{1/2}\right)d\sigma_n,$$

et on déduit du théorème 4.1 que $C\leq 1$.

Supposons que $C=0$. Alors $\prod_{j=1}^{n}f_j=0$ presque partout, et donc $\sum_{j=1}^{n}\log f_j=-\infty$ presque partout. On aurait alors

$$-\infty=\int_{S^{n-1}}F\left(\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j)\right)d\sigma_n=\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}}f_j\log f_jd\sigma_n,$$

ce qui est impossible car, d'après l'inégalité de Jensen, $\int_{S^{n-1}}f_j\log f_jd\sigma_n\geq 0$ pour tout $j$. Donc $0<C<1$.

On peut donc définir une densité de probabilité $H$ sur $S^{n-1}$ par

$$H=\frac{1}{C}\prod_{j=1}^{n}f_j^{1/2}.$$

L'inégalité de Jensen nous donne alors

$$0 \leq \int_{S^{n-1}} \left(\frac{F}{H}\right) \log\left(\frac{F}{H}\right) H d\sigma_n.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{S^{n-1}} F \log F d\sigma_n - \int_{S^{n-1}} H \log H d\sigma_n \\ = \int_{S^{n-1}} F \log F d\sigma_n - \sum_{j=1}^{n} \int_{S^{n-1}} F \log f_j^{1/2} d\sigma_n + \log C \qquad (19) \\ = \int_{S^{n-1}} F \log F d\sigma_n - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_{S^{n-1}} f_j \log f_j d\sigma_n + \log C. \end{aligned}$$

La constante $\log C$ étant négative, on obtient l'inégalité énoncée. Notons que la constante 2 de l'inégalité démontrée provient directement de l'optimalité de la norme $L^2$ dans le théorème 4.1, comme on le voit apparaître dans (19). □

Pour pouvoir conclure grâce au lemme de Poincaré, il reste donc à obtenir une convergence p.s. pour la marginale au temps $t$. Il serait par ailleurs intéressant de regarder si les contre-exemples de Bobylev-Cercignani pour la conjecture de Cercignani (cf. **2.3**) peuvent être adaptés au modèle de Kac, pour ensuite les relever grâce au théorème 3.1. On espère ainsi comprendre pourquoi les inégalités de type entropie-dissipation d'entropie du théorème 2.6 ne sont pas uniformes en $n$ dans le cas $\gamma < 2$ : c'est cette non-uniformité des estimations qui dans ce cas nous empêche d'obtenir par la méthode que nous venons de développer la convergence vers l'équilibre de la solution de l'équation limite, et l'existence de contre-exemples à la conjecture de Cercignani dans le cas du modèle de Kac pour $\gamma < 2$ nous empêcherait elle aussi de conclure à cette convergence vers l'équilibre, directement au niveau de l'équation limite.

## Références


[BoCe] **A. V. Bobylev, C. Cercignani**
On the rate of entropy production for the Boltzmann equation, J. Statist. Phys. 94, 3-4 (1999), 603-618.

[CLL] **E. Carlen, E. Lieb, M. Loss**
A sharp analog of Young's inequality on $S^N$ and related entropy inequalities, Communication personnelle, (2003).

[ChGi] **B. Chauvin, G. Giroux**
A geometric rate of convergence to the equilibrium for the Boltzmann processes with multiple particle interactions, J. Appl. Prob. 27 (1990), 510-520.

[CIP] **C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti**
*The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer (1994).

[DoVa] **M. Donsker, S. Varadhan**
Asymptotic evaluation of certain Markov Process expectations dor large time, I, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 1-47.

[Fel] **W. Feller**
*An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II*, Wiley (1966).

[GrMe] **C. Graham, S. Méléard**
Probabilistic tools and Monte-Carlo approximations for some Boltzmann equations, Ensemble de notes pour des conférences au CEMRACS (1999).

[Kac] **M. Kac**
Foundations of kinetic theory, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, vol. III*, University of California Press (1956), 171-197.

[Mel] **S. Méléard**
Probabilistic interpretation and approximations of some Boltzmann equations, *Guanajuato, 1998*, Soc. Mat. Mexicana, Mexico (1998).

[Spo] **H. Spohn**
*Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Springer (1991).

[Szn] **A.S. Sznitman**
Topics in propagation of chaos, *Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XIX - 1989*, Lect. Notes in Math. 1464, Springer (1991).

[Vi1] **C. Villani**
A survey of mathematical topics in collisional kinetic theory, in *Handbook of mathematical fluid dynamics*, Elsevier Science (2002).

[Vi2] **C. Villani**
Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true, Commun. Math. Phys. 234 (2003), 455-490.