M.M.F.A.I. ENS Ulm

Introduction à l'équation de Boltzmann

Jonathan Le Roux

Juin 2003

1 Introduction à l'équation de Boltzmann

1.1 Modèle cinétique, fonction de distribution

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution cinétique d'un gaz constitué d'un seul type de particules en moyenne altitude, c'est-à-dire dans une zone où le libre parcours moyen des particules est du même ordre que la taille typique des objets considérés (un avion par exemple).

On part de la modélisation mathématique d'un gaz formé d'un très grand nombre n de particules identiques en interaction. On supposera que le gaz est contenu dans un domaine (borné ou non) $X \subset \mathbb{R}^N$, le cas $N = 3$ correspondant au cadre physique le plus naturel. On pourra par exemple considérer, en négligeant les effets de bord, que le gaz occupe tout l'espace.

Si l'on suppose que la position $x_i \in \mathbb{R}^N$ et la vitesse $v_i \in \mathbb{R}^N$ suffisent à décrire la particule p_i pour $i = 1, \ldots, n$, l'état du gaz peut alors à chaque instant $t \geq 0$ être décrit de façon *microscopique* par un point $\big((x_1(t), v_1(t)), \ldots, (x_n(t), v_n(t))\big)$ de représentation dans l'espace des phases $\big(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\big)^n$. On peut écrire les lois de Newton sous la forme d'un (très grand) système de $2n$ équations du premier ordre faisant intervenir les positions $x_i(t)$ et les vitesses $v_i(t)$ de toutes les particules, ainsi que les forces d'interaction et extérieures agissant sur ces particules. Un exemple typique est le modèle des *sphères dures* dans lequel les particules rebondissent les unes sur les autres comme des boules de billard ; le flot associé aux équations de Newton est alors bien défini pour presque toute condition initiale en $t = 0$ et détermine ainsi l'évolution des particules au cours du temps.

Cependant cette description microscopique présente beaucoup d'inconvénients : on ne connait pas les données initiales à l'instant $t = 0$, les calculs sont difficiles car ils font intervenir un très grand nombre de paramètres, la connaissance des positions $x_i(t)$ et des vitesses $v_i(t)$ ne donne pas les grandeurs *macroscopiques* physiques intéressantes que sont les densité $\rho(t, x)$, vitesse $u(t, x)$ et température $T(t, x)$ moyennes du gaz à l'instant $t \geq 0$ et au point $x \in \mathbb{R}^N$.

C'est pourquoi on cherche à passer de cette description microscopique exacte au niveau des particules dans un espace des phases très grand à une description macroscopique : en considérant que le gaz se rapproche d'un continuum puisqu'il est formé d'un très grand nombre n de particules, l'état du gaz peut être décrit dans un *modèle cinétique* par une densité de probabilité $f(t, x, v)$ représentant au temps $t \geq 0$ la densité de présence de l'ensemble des particules dans l'espace des phases $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. A chaque instant $t \geq 0$, $f(t, ., .)$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ représente la position, $v \in \mathbb{R}^N$ représente la vitesse et $f(t, x, v)\, dx\, dv$ représente la quantité de particules dans l'élément de volume $dx\, dv$ centré en (x, v) dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Il y a deux manières d'interpréter cette fonction de distribution : on peut voir la mesure $f(x, v)\, dx\, dv$ comme une approximation de la mesure empirique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, v_i)}$, mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v$, $\big((x_1(t), v_1(t)), \cdots, (x_n(t), v_n(t))\big)$ étant la configuration microscopique du gaz ; on peut aussi considérer une densité de probabilité symétrique f^n sur l'espace $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)^n$ de toutes les configurations macroscopiques (modélisant un manque de connaissance sur la position exacte des particules), et f comme une approximation de la première marginale de f^n.

L'intérêt de ce modèle est qu'il permet d'exprimer les quantités macroscopiques mesurables, les "observables", comme des moyennes de quantités microscopiques. En particulier, au temps $t \geq 0$ et au point $x \in \mathbb{R}^N$, on peut définir la densité locale ρ, la vitesse macroscopique locale u

et la température locale T du gaz par les formules

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v)\,dv,$$

$$\rho u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v)\,v\,dv,$$

$$\rho T(t,x) = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v)|v-u(t,x)|^2\,dv.$$

1.2 Opérateur de transport et opérateur de collision de Boltzmann

En l'absence de forces extérieures et d'interactions entre les particules, d'après le principe de Newton chaque particule se déplace à vitesse constante le long d'une droite, et la densité de particules est donc constante le long des caractéristiques $dx/dt = v$, $dv/dt = 0$. On peut donc calculer f au temps t grâce à f au temps 0 : $f(t,x,v) = f(0,x-vt,v)$, autrement dit f est solution faible de l'équation de libre transport

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f = 0.$$

Si l'on rajoute une force extérieure macroscopique $F(x)$, on obtient l'équation de Vlasov linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + F(x)\cdot\nabla_v f = 0.$$

On souhaite maintenant prendre en compte les interactions entre les particules ; pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

1. les particules interagissent via des *collisions binaires* : une collision est le résultat de l'interaction microscopique de deux particules qui passent très près l'une de l'autre, ce qui entraîne une forte déviation de leurs trajectoires en un temps très court. Cette hypothèse implique implicitement que le gaz est suffisamment dilué pour pouvoir négliger l'effet des collisions faisant intervenir plus de deux particules. En dimension $N = 3$, cela correspond à la limite de Boltzmann-Grad : on considère un gaz de n sphères dures de rayon r, et l'on fait tendre n vers l'infini, r vers 0 de telle sorte que $nr^2 \to 1$.

2. les collisions sont *localisées* en temps et en espace : elles se déroulent sur des échelles de temps et d'espace très inférieures aux échelles typiques de description.

3. les collisions sont *élastiques* : la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont préservées par une collision. Par conséquent, si v' et v'_* désignent les vitesses de deux particules entrant en collision et si v et v_* désignent leurs vitesses juste après la collision, on a

$$\begin{cases} v' + v'_* = v + v_* \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2 \end{cases}.$$

On peut représenter les solutions de ce système sous la forme

$$\begin{cases} v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma \\ v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma \end{cases},$$

où le paramètre σ décrit la sphère unité S^{N-1} (même si l'on considère que les particules sont ponctuelles, heuristiquement σ modélise l'influence de l'angle sous lequel une particule vient en toucher une autre, comme si celles-ci étaient des sphères de rayon très petit).

L'angle $\theta \in [0, \pi]$ de déviation défini par

$$\cos\theta \;=\; (k, \sigma)$$

où k est le vecteur unitaire

$$k \;=\; \frac{v - v_*}{|v - v_*|}$$

est l'angle entre les vitesses pré et post-collisionnelles.

4. les collisions sont *microréversibles* : d'un point de vue probabiliste, la probabilité que les vitesses (v', v'_*) soient changées en (v, v_*) dans une collision est égale à la probabilité que les vitesses (v, v_*) soient changées en (v', v'_*).

5. les collisions satisfont l'hypothèse de *chaos moléculaire* : les vitesses de deux particules qui vont entrer en collision ne sont pas corrélées. Cette hypothèse introduit une dissymétrie entre le passé et le futur, car si les vitesses pré-collisionnelles n'étaient pas corrélées, alors les vitesses post-collisionnelles le seront certainement.

Sous ces hypothèses, Boltzmann montra en 1872 qu'il fallait ajouter dans le second membre de l'équation de transport libre un opérateur de collision quadratique modélisant l'effet des collisions sur la densité f et agissant uniquement sur la dépendance en v :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \,+\, v \cdot \nabla_x f \;= Q(f, f),$$

avec

$$Q(f,f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} dv_* \int_{S^{N-1}} B(v - v_*, \sigma)\,[f' f'_* \;-\; f f_*]\, d\sigma$$

où f_*, f', f'_* désignent respectivement $f(t, x, v_*)$, $f(t, x, v')$, $f(t, x, v'_*)$ et où B est une fonction positive appelée *noyau de collision*; ce noyau de collision tient compte du fait que les collisions peuvent avoir des importances différentes selon la configuration relative des particules qui se rencontrent. Pour des raisons de symétrie, ce noyau de collision dépend seulement du module $|v - v_*|$ de la vitesse relative et du cosinus de l'angle θ de déviation défini précédemment, et Q peut aussi s'écrire sous la forme

$$Q(f,f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} dv_* \int_{S^{N-1}} b(|v - v_*|, \cos\theta)\,[f' f'_* \;-\; f f_*]\, d\sigma.$$

Q peut se voir comme la différence de deux termes, de gain et de perte,

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f).$$

Le terme de perte compte toutes les collisions dans lesquelles une certaine particule de vitesse v va en rencontrer une autre de vitesse v_*; après une telle collision, la particule changera en général de vitesse, et il y aura donc moins de particules avec la vitesse v. D'un autre côté, à chaque fois que des particules avec des vitesses v' et v'_* se rencontrent, la particule avec la vitesse v' peut acquérir la vitesse v après la collision, ce qui donnera plus de particules de vitesse v.

On peut voir l'influence des hypothèses sur la forme de l'opérateur de collision : 1. la nature quadratique de l'opérateur découle du fait que l'on ne considère que des collisions binaires ; 2. la localisation en temps et en espace des collisions entraine que les variables t, x ne sont que des paramètres ; 3. l'hypothèse d'élasticité des collisions donne la forme de v' et v'_*; 4. la microréversibilité implique la symétrie du noyau de collision (dépendance en vitesse relative et angle de déviation) ; 5. l'hypothèse de chaos moléculaire a pour conséquence la présence des produits tensoriels $f'f'_*$ et ff_*.

Le noyau de collision peut être explicité dans certains cas. Ainsi dans le modèle étudié par Boltzmann, les particules sont assimilées à des boules de billard (cas des sphères dures) et le noyau de collision est de la forme

$$b(|v-v_*|, \cos\theta) \;=\; c_0|v-v_*|$$

où c_0 est une constante, alors que si la force d'interaction entre deux particules dérive d'un potentiel de la forme générale $\phi(r) \;=\; r^{1-s}$ où $s \geq 2$, le noyau de collision peut être explicité sous la forme

$$b(|v-v_*|, \cos\theta) \;=\; |v-v_*|^{\gamma}\tilde{b}(\cos\theta)$$

avec $\gamma = \dfrac{s-(2N-1)}{s-1}\cdot$ Le cas de l'interaction coulombienne correspond à $s=2$ et $N=3$, et le noyau de collision est alors donné par la formule de Rutherford

$$b(|v-v_*|, \cos\theta) \;=\; |v-v_*|^{-3}\sin^{-4}\frac{\theta}{2}\cdot$$

Le principal obstacle pour pouvoir considérer le noyau de collision B comme une mesure de probabilité sur l'ensemble des choix de $\sigma \in S^{N-1}$ et une fonction de la vitesse relative $v - v*$ est que B n'est pas toujours intégrable (cf. le cas coulombien). Cette singularité non-intégrable de la partie angulaire du noyau est dûe à la surabondance des collisions rasantes, c'est-à-dire au cours desquelles les particules sont à peine déviées. C'est le cas lorsque l'on modélise une interaction à longue portée : lorsque les particules interagissent à travers un potentiel d'interaction, le paramètre d'impact p (distance minimale si les deux particules n'interagissaient pas) apparaît dans le noyau de collision et on obtient

$$\int_0^{\pi} B(|v-v_*|\,,\,\cos\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \frac{|v-v_*|p_{\max}^2}{2},$$

qui est donc infini pour des forces à portée infinie, quelle que soit la décroissance de celles-ci à l'infini. Il peut sembler étonnant de considérer des forces à portée infinie alors que l'on fait l'hypothèse de localisation en espace des interactions. Il n'est toutefois pas a priori contradictoire de supposer que la portée de la force est infinie à une échelle microscopique tout en étant négligeable à une échelle macroscopique.

On suppose donc souvent le noyau de collision localement intégrable ; on parle en général d'hypothèse de "cut-off angulaire" de Grad :

$$\int_{S^{N-1}} \tilde{b}(k\cdot\sigma)d\sigma = |S^{N-2}|\int_0^{\pi}\tilde{b}(\cos\theta)\sin^{N-2}\theta d\theta < \infty.$$

Les résultats dans le domaine se séparent fréquemment en deux catégories, avec ou sans hypothèse de "cut-off angulaire", les résultats avec "cut-off" étant de loin les plus nombreux.

1.3 Invariants de collision et Théorème H

On souhaite étudier l'expression suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{S^{N-1}} B(v-v_*,\sigma)\,[f'f'_* - ff_*]\phi(v)\,d\sigma dv_* dv,$$

où f et ϕ sont telles que les intégrales existent. On peut obtenir (au moins formellement) diverses relations, grâce à des changements de variables simples :

- échanger les variables étoilées et non-étoilées nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{S^{N-1}} b(|v-v_*|,\sigma\cdot k)\,[f'f'_* - ff_*]\phi(v_*)\,d\sigma dv_* dv.$$

- par le changement de variable de jacobien unitaire $(v,v_*,\sigma)\to(v',v'_*,k)$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{S^{N-1}} b(|v-v_*|,\sigma\cdot k)\,[ff_* - f'f'_*]\phi(v')\,d\sigma dv_* dv.$$

- si on échange les variables étoilées et non-étoilées dans cette dernière expression, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{S^{N-1}} b(|v-v_*|,\sigma\cdot k)\,[ff_* - f'f'_*]\phi(v'_*)\,d\sigma dv_* dv.$$

On peut maintenant considérer une combinaison linéaire de ces quatre expressions pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{S^{N-1}} B(v-v_*,\sigma)\,[f'f'_* - ff_*](\phi+\phi_*-\phi'-\phi'_*)\,d\sigma dv_* dv.$$

$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f)\phi(v)dv$ est donc nul indépendamment de f pour tout ϕ solution de l'équation fonctionnelle

$$\phi+\phi_* = \phi'+\phi'_*.$$

On peut montrer sous des conditions très faibles que les solutions de cette équation sont les combinaisons linéaires des *invariants de collision* :

$$\phi(v) = 1,\ v_i,\ \frac{|v|^2}{2},\quad 1\le i\le N.$$

On obtient ainsi les lois de conservations (formelles) de l'équation de Boltzmann : si f est solution de l'équation de Boltzmann,

$$\frac{d}{dt}\int f(t,x,v)\begin{pmatrix}1\\ v_i\\ \frac{|v|^2}{2}\end{pmatrix}dx\,dv = 0,\quad 1\le i\le N,$$

c'est-à-dire que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totales du gaz sont conservées. Ces lois de conservations sont vraies si $X=\mathbb{R}^N$, mais peuvent toutefois tomber en défaut dans un domaine borné, selon les conditions que l'on met au bord. On remarque par ailleurs qu'elles sont vraies dans le cas spatialement homogène.

Si l'on intègre uniquement par rapport à la variable de vitesse contre les invariants de collision, on obtient des lois de conservations locales :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} f v \otimes v \, dv\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho |u|^2 + N\rho T) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} f |v|^2 v \, dv\right) = 0. \end{cases}$$

Si l'on considère maintenant $\phi = \log(f)$ et en supposant que les manipulations sont encore valides, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f,f) \log(f) dv = -D(f),$$

où D est la fonctionnelle de production d'entropie,

$$D(f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times S^{N-1}} B(v - v_*, \sigma) \, [f' f'_* \, - \, f f_*] \log \frac{f' f'_*}{f f_*} \, d\sigma dv_* dv \geq 0,$$

car la fonction $(x, y) \mapsto (x - y)(\log x - \log y)$ est positive, et si $B > 0$ presque partout alors $D(f) = 0$ si et seulement si

$$f' f'_* = f f_*$$

est vrai presque partout. $\phi = \log f$ est donc un invariant de collision, et $f = \exp(a + b \cdot v + c|v|^2)$. f étant supposé intégrable, $c < 0$, et on peut réécrire f sous la forme

$$f = A \exp(-\alpha |v - u|^2), \quad A, \alpha > 0.$$

Ce type de fonction est appelé Maxwellienne. On en déduit que les seules solutions satisfaisant $Q(f, f) = 0$ sont les Maxwelliennes.

On introduit les fonctionnelles $\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \log f \, dv$ et $\mathcal{I}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \log f \, v \, dv$. Si f est solution de l'équation de Boltzmann, on obtient alors l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathcal{I} = -D.$$

Dans le cas spatialement homogène, on en déduit le théorème H de Boltzmann :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -D \leq 0,$$

$\mathcal{H}$ est une quantité strictement décroissante, sauf si f est une Maxwellienne, auquel cas la dérivée en temps de $\mathcal{H}$ est nulle. Le théorème H correspond à la seconde loi de la thermodynamique (loi de Clausius) selon laquelle l'entropie physique $-\mathcal{H}(f)$ d'un système isolé est croissante au cours du temps. Il traduit en particulier une propriété d'irréversibilité dans le modèle de Boltzmann.

La densité, la vitesse macroscopique et la température étant conservées dans le cas spatialement homogène, on peut construire une Maxwellienne M ayant même ρ, u, T que toute solution f associée à une condition initiale donnée :

$$M(v) = M^f(v) = \frac{\rho e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{N/2}}.$$

Par ailleurs, on remarque que pour tous $x, y \geq 0$, $x\log x - x\log y + y - x$ est positif. De plus, $\log M$ étant un invariant de collision, $\int_{\mathbb{R}^N} g\log M\,dv$ ne dépend que des trois premiers moments de g, et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\log M\,dv = \int_{\mathbb{R}^N} M\log M\,dv,$$

ou encore

$$\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(M) = \int_{\mathbb{R}^N} f\log\frac{f}{M}\,dv = \mathcal{H}(f|M),$$

l'entropie relative de Kullback. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\log f\,dv - \int_{\mathbb{R}^N} f\log M\,dv + \int_{\mathbb{R}^N}(M-f)\,dv = \mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(M) \geq 0.$$

$\mathcal{H}$ est donc strictement décroissant si $f \neq M$ et est borné inférieurement par $\mathcal{H}(M)$. Il est tentant de penser que $\mathcal{H}(f)$ va converger vers $\mathcal{H}(M)$. Ce n'est hélas pas si évident et on y reviendra lorsque l'on parlera de la conjecture de Cercignani. Toutefois, si l'on suppose que l'on a convergence de $\mathcal{H}(f)$ vers $\mathcal{H}(M)$ quand t tend vers l'infini, on peut en déduire que f tend vers M dans L^1. En effet, introduisons la fonction

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq z \end{cases}.$$

Une étude simple de la fonction $h : x \mapsto x\log x + x - 1 - cg(|x-1|)|x-1|$ montre que si c est choisi suffisamment petit, h est positive sur $\mathbb{R}^+$. En prenant $x = f/M$, on obtient

$$f\log f - f\log M + M - f \geq cg\left(\frac{|f-M|}{M}\right)|f-M|.$$

On intègre cette inégalité pour obtenir

$$\mathcal{H}(f|M) \geq c(\int_{G_t}|f-M|\,dv + \int_{P_t}|f-M|^2M^{-1}\,dv),$$

où G_t et P_t désignent les ensembles (dépendant du temps) sur lesquels $|f-M|$ est plus grand (respectivement plus petit) que M. Puisque $\mathcal{H}(f|M)$ est supposé tendre vers 0, les deux intégrales du membre de droite tendent aussi vers 0 quant $t \to \infty$. Par Cauchy-Schwartz, on en déduit que

$$\int_{P_t}|f-M|\,dv \leq \left(\int_{P_t}|f-M|^2M^{-1}\,dv\right)^{1/2}\left(\int_{P_t}M\,dv\right)^{1/2} \to 0.$$

Enfin,

$$\int |f-M|\,dv = \int_{G_t}|f-M|\,dv + \int_{P_t}|f-M|\,dv$$

tend aussi vers 0 et f tend vers M dans L^1.

Dans le cas non-homogène, il faut intégrer aussi par rapport à la variable d'espace :

$$H(f) = \int_{X\times\mathbb{R}^N_v} f\log f.$$

On obtient pour f solution de l'équation de Boltzmann

$$\frac{dH}{dt} \leq \int_{\partial X} \mathcal{I} \cdot n d\sigma,$$

où n est la normale intérieure et $d\sigma$ la mesure sur ∂X. La situation dépend alors du domaine X et des conditions aux bords. Par exemple, dans le cas $X = \mathbb{R}^N$ des conditions de décroissance à l'infini sont nécessaires pour conclure à la décroissance de H..

Il reste donc à s'intéresser à la convergence en entropie. On a vu que la dérivée temporelle de l'entropie était liée à la fonctionnelle D. Il serait donc très utile pour démontrer une telle convergence d'obtenir des inégalités de type *entropie-production d'entropie* :

$$D(f) \geq \Theta(H(f|f_\infty)),$$

où $H \mapsto \Theta(H)$ est une fonction continue strictement positive quand $H > 0$. On aurait alors en effet en notant $H(t) = H(f(t,\cdot)|f_\infty)$ une inégalité différentielle

$$-\frac{d}{dt}H(t) \geq \Theta(H(t)),$$

dont on déduit que $H(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, avec des taux de convergence explicites si la fonction Θ est suffisamment connue. Il est hélas le plus souvent très difficile ou impossible d'obtenir des inégalités aussi fortes, et l'on s'autorise plutôt une dépendance de Θ en fonction de certaines quantités relatives à f, comme sa norme dans des espaces de Lebesgue (avec poids), sa stricte positivité, sa régularité, etc... autant d'estimations a priori qui devront être démontrées indépendamment. C'est dans cette perspective que Cercignani énonça au début des années 80 une conjecture selon laquelle une équation de type entropie-production d'entropie linéaire était vérifiée :

Conjecture. (Cercignani) *Soit $B \geq 1$ un noyau de collision et D la fonctionnelle de production d'entropie associée. Soit $f(v)$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^N$ de température unité, et M la Maxwellienne associé. Alors, il existe $\lambda(f) > 0$ dépendant de f uniquement à travers certaines estimations de moments, de régularité de Sobolev, de borne inférieure, telle que*

$$D(f) \geq 2\lambda(f)H(f|M).$$

Cette conjecture fut en fait contredite par Bobylev et Cercignani : ils construisirent une famille de fonctions pour lesquelles cet inégalité est fausse pour un λ uniforme alors que ces fonctions possèdent des normes L^p ou H^k (quels que soient p, k) uniformément bornées, des moments d'ordre k (quel que soit k) uniformément bornés, et sont bornées inférieurement par une Maxwellienne fixé. Ces contre-exemples sont obtenus en ajoutant à la fonction d'équilibre un saut très petit à des vitesses très élévées.

S'approchant de bornes linéaires, Toscani et Villani prouvèrent en 1999 les premières bornes polynomiales : si le noyau de collision vérifie

$$B(v - v_*, \sigma) \geq K_B(1 + |v - v_*|)^{-\beta} \quad (K_B > 0, \ \beta > 0),$$

alors pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$D(f) \geq K_\epsilon(f)H(f|M^f)^{1+\epsilon}.$$

Puis Villani montra ([Vi2]) que la conjecture de Cercignani était vraie pour un noyau de collision super-quadratique au sens où

$$B(v - v_*, \sigma) \geq K_B(1 + |v - v_*|^2),$$

et étendit les précédents résultats au cas où le noyau s'annule pour $v = v_*$, permettant ainsi de traiter les cas physiquement intéressants.

2 Interprétation probabiliste de l'équation de Boltzmann

On cherche à généraliser la notion de solution de l'équation de Boltzmann en en donnant une formulation faible. Intégrons l'équation contre une fonction test ϕ :

$$\int \phi(x,v)(\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)\, dx\, dv = \int \phi(x,v) \int_{S^{N-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^N} dv_* B(v - v_*, \sigma)\, [f' f'_* - f f_*]\, dx\, dv.$$

On transpose les opérateurs pour les faire agir sur ϕ et à l'aide d'une intégration par parties et du changement de variables $(v, v_*) \to (v', v'_*)$, on obtient

$$\partial_t \langle P_t, \phi \rangle - \langle P_t, v \cdot \nabla_x \phi(x,v) \rangle = \langle P_t(dx, dv), \int (\phi(x, v') - \phi(x,v)) B(v - v_*, \sigma) f(t, x, v_*)\, dv_* d\sigma \rangle,$$

où $P_t(dx, dv) = f(t,x,v) dx\, dv$.

On peut voir cette équation comme l'équation d'évolution du flot de marginales d'un processus stochastique non-linéaire (X_t, V_t) dans lequel une particule évolue selon le flot libre et dont la vitesse saute de v à v_* au point x et au temps t selon $B(v - v_*, \sigma) f(t, x, v_*)\, dv_* d\sigma$. On peut donc considérer des conditions initiales plus générales que des densités, P_0 peut être une mesure de probabilité quelconque, un dirac par exemple.

Soit $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^{2N}))$ l'espace des mesures de probabilités sur $\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^{2N})$ ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t \in]0, T]$. On admet que pour tout P dans $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^{2N}))$ il existe une fonction mesurable $p(t,x,v)$ sur $]0,T] \times \mathbb{R}^{2N}$ telle que pour tout $t \in]0,T]$, $p(t, \cdot)$ est une densité de P_t. On appelle une telle fonction une version mesurable des densités de P. On notera par ailleurs $v' - v = h(v, v_*, \sigma)$. On rappelle que le processus canonique (X_t) sur un espace $\Omega = \mathbb{D}([0,T], E)$ considéré comme espace des aléas est défini par $\forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = \omega_t$. Si Ω est alors muni d'une probabilité P, la loi de (X_t) est P.

Définition. *Une mesure de probabilité $P \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^{2N}))$ est solution du problème de martingale non-linéaire $(\mathcal{M})$ si pour toute fonction $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^{2N})$, si (X, V) est le processus canonique sur $\mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$,*

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t V_s \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s)\, ds$$

$$- \int_0^t \int_{S^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} [\phi(X_s, V_s + h(V_s, v_*, \sigma)) - \phi(X_s, V_s)] B(V_s - v_*, \sigma) p(s, X_s, v_*)\, dv_* d\sigma ds$$

est une P-martingale, où $p(t, \cdot)$ est une version mesurable des densités du flot de marginales $(P_t)_{t \geq 0}$ et $P_0(dx, dv) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2N})$ est donnée.

Cette définition ne dépend clairement pas du choix de la version mesurable de densités de P. On remarque par ailleurs qu'en prenant l'espérance dans l'expression précédente on retombe sur la version faible de l'équation de Boltzmann pour le flot des marginales. Enfin, les résultats d'existence et d'unicité sont aussi difficiles à obtenir que dans la version analytique, en particulier à cause de la localisation de l'interaction ; la densité $p(t,x,v_*)dv_*$ est difficile à contrôler en fonction de la marginale $P_t(dx,dv)$, notamment en ce qui concerne la continuité et la bornitude. On considère donc souvent une équation plus simple dans laquelle l'interaction n'est plus localisée, l'équation de Povzner (mollified problem), ou encore des modèles spatialement homogènes (modèle de Kac, ...) (cf. [GrMe],[Mel]).

Références

[CIP] **C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti**
The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer (1994).

[GrMe] **C. Graham, S. Méléard**
Probabilistic tools and Monte-Carlo approximations for some Boltzmann equations, Ensemble de notes pour des conférences au CEMRACS (1999).

[Kac] **M. Kac**
Foundations of kinetic theory, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, vol. III*, University of California Press (1956), 171-197.

[Mel] **S. Méléard**
Probabilistic interpretation and approximations of some Boltzmann equations, *Guanajuato, 1998*, Soc. Mat. Mexicana, Mexico (1998).

[Vi1] **C. Villani**
A survey of mathematical topics in collisional kinetic theory, in *Handbook of mathematical fluid dynamics*, Elsevier Science (2002).

[Vi2] **C. Villani**
Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true, Commun. Math. Phys. 234 (2003), 455-490.